

# Dzień Popularyzacji Matematyki

O KWADRATACH ŁACIŃSKICH  
I ICH GRECKIM RODZEŃSTWIE

Łukasz Rajkowski  
26 września 2024

## Sudoku

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | 8 |   |   | 5 |   |   | 2 |   |
| 2 |   | 3 |   | 4 |   | 9 |   | 1 |
|   |   |   | 1 |   | 2 |   |   |   |
| 5 | 2 |   |   |   |   |   | 8 | 9 |
|   |   | 6 |   |   |   | 3 |   |   |
| 1 | 3 |   |   |   |   |   | 4 | 7 |
|   |   |   | 6 |   | 7 |   |   |   |
| 9 |   | 7 |   | 1 |   | 8 |   | 6 |
|   | 6 |   |   | 9 |   |   | 7 |   |

## Sudoku

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | 8 |   |   | 5 |   |   | 2 |   |
| 2 |   | 3 |   | 4 |   | 9 |   | 1 |
|   |   |   | 1 |   | 2 |   |   |   |
| 5 | 2 |   |   |   |   |   | 8 | 9 |
|   |   | 6 |   |   |   | 3 |   |   |
| 1 | 3 |   |   |   |   |   | 4 | 7 |
|   |   |   | 6 |   | 7 |   |   |   |
| 9 |   | 7 |   | 1 |   | 8 |   | 6 |
|   | 6 |   |   | 9 |   |   | 7 |   |

## Sudoku

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | 8 |   |   | 5 |   |   | 2 |   |
| 2 |   | 3 |   | 4 |   | 9 |   | 1 |
|   |   |   | 1 |   | 2 |   |   |   |
| 5 | 2 |   |   |   |   |   | 8 | 9 |
|   |   | 6 |   |   |   | 3 |   |   |
| 1 | 3 |   |   |   |   |   | 4 | 7 |
|   |   |   | 6 |   | 7 |   |   |   |
| 9 |   | 7 |   | 1 |   | 8 |   | 6 |
|   | 6 |   |   | 9 |   |   | 7 |   |

## Sudoku

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | 8 |   |   | 5 |   |   | 2 |   |
| 2 |   | 3 |   | 4 |   | 9 |   | 1 |
|   |   |   | 1 |   | 2 |   |   |   |
| 5 | 2 |   |   |   |   |   | 8 | 9 |
|   |   | 6 |   |   |   | 3 |   |   |
| 1 | 3 |   |   |   |   |   | 4 | 7 |
|   |   |   | 6 |   | 7 |   |   |   |
| 9 |   | 7 |   | 1 |   | 8 |   | 6 |
|   | 6 |   |   | 9 |   |   | 7 |   |

## Sudoku

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 1 | 9 | 5 | 6 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 8 | 9 | 6 | 1 |
| 6 | 7 | 9 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 8 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 8 | 9 |
| 7 | 9 | 6 | 8 | 2 | 4 | 3 | 1 | 5 |
| 1 | 3 | 8 | 5 | 6 | 9 | 2 | 4 | 7 |
| 3 | 1 | 2 | 6 | 8 | 7 | 5 | 9 | 4 |
| 9 | 4 | 7 | 2 | 1 | 5 | 8 | 3 | 6 |
| 8 | 6 | 5 | 4 | 9 | 3 | 1 | 7 | 2 |

## Sudoku

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 1 | 9 | 5 | 6 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 8 | 9 | 6 | 1 |
| 6 | 7 | 9 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 8 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 8 | 9 |
| 7 | 9 | 6 | 8 | 2 | 4 | 3 | 1 | 5 |
| 1 | 3 | 8 | 5 | 6 | 9 | 2 | 4 | 7 |
| 3 | 1 | 2 | 6 | 8 | 7 | 5 | 9 | 4 |
| 9 | 4 | 7 | 2 | 1 | 5 | 8 | 3 | 6 |
| 8 | 6 | 5 | 4 | 9 | 3 | 1 | 7 | 2 |

... ale my nie będziemy mówić o Sudoku!

## Kwadraty łacińskie

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 4 | 3 | 6 | 1 | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 5 | 8 | 3 | 9 | 2 | 7 |
| 9 | 6 | 2 | 1 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 |
| 5 | 2 | 7 | 6 | 9 | 4 | 1 | 3 | 8 |
| 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 9 | 6 | 8 | 4 |
| 7 | 4 | 9 | 8 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 |
| 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 | 2 |
| 3 | 9 | 5 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 | 6 |
| 6 | 3 | 8 | 7 | 1 | 5 | 2 | 4 | 9 |



## Kwadraty łacińskie

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 4 | 3 | 6 | 1 | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 5 | 8 | 3 | 9 | 2 | 7 |
| 9 | 6 | 2 | 1 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 |
| 5 | 2 | 7 | 6 | 9 | 4 | 1 | 3 | 8 |
| 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 9 | 6 | 8 | 4 |
| 7 | 4 | 9 | 8 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 |
| 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 | 2 |
| 3 | 9 | 5 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 | 6 |
| 6 | 3 | 8 | 7 | 1 | 5 | 2 | 4 | 9 |

## Kwadraty łacińskie

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 4 | 3 | 6 | 1 | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 5 | 8 | 3 | 9 | 2 | 7 |
| 9 | 6 | 2 | 1 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 |
| 5 | 2 | 7 | 6 | 9 | 4 | 1 | 3 | 8 |
| 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 9 | 6 | 8 | 4 |
| 7 | 4 | 9 | 8 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 |
| 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 | 2 |
| 3 | 9 | 5 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 | 6 |
| 6 | 3 | 8 | 7 | 1 | 5 | 2 | 4 | 9 |

## Kwadraty łacińskie

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 4 | 3 | 6 | 1 | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 5 | 8 | 3 | 9 | 2 | 7 |
| 9 | 6 | 2 | 1 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 |
| 5 | 2 | 7 | 6 | 9 | 4 | 1 | 3 | 8 |
| 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 9 | 6 | 8 | 4 |
| 7 | 4 | 9 | 8 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 |
| 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 | 2 |
| 3 | 9 | 5 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 | 6 |
| 6 | 3 | 8 | 7 | 1 | 5 | 2 | 4 | 9 |

## Kwadraty łacińskie

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 4 | 3 | 6 | 1 | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 5 | 8 | 3 | 9 | 2 | 7 |
| 9 | 6 | 2 | 1 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 |
| 5 | 2 | 7 | 6 | 9 | 4 | 1 | 3 | 8 |
| 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 9 | 6 | 8 | 4 |
| 7 | 4 | 9 | 8 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 |
| 8 | 5 | 1 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 | 2 |
| 3 | 9 | 5 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 | 6 |
| 6 | 3 | 8 | 7 | 1 | 5 | 2 | 4 | 9 |

**Definicja.** Kwadrat łaciński  $n \times n$  jest wypełniony liczbami od 1 do  $n$  tak, że każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się każda liczba od 1 do  $n$ .

## Uzupełnij Sudoku!

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 4 | 3 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 8 |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 9 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 4 |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 7 |  |  |  |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

|   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|--|--|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 |  |  |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

|   |   |   |   |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|--|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 |  |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 |  |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 |  |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 |  |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 |  |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 |  |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 |  |  |  |  |  |



## Uzupełnij Sudoku!

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

Tu musi być 3, 4 lub 7

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

Tu musi być 3, 4 lub 7

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Uzupełnij Sudoku!

Tu musi być 3, 4 lub 7

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

GAME OVER!

## Uzupełnij Sudoku!

Tu musi być 3, 4 lub 7

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

GAME OVER!

... trzeba było „patrzeć w przyszłość”!

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 |  |  |  |



## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 | 9 |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 6 |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 | 2 |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 5 |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 |  |  |

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 | 9 | 8 |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 6 | 7 |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 | 4 |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 6 |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 1 |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 9 |  |

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 6 | 7 | 3 |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 6 | 9 |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 1 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 | 8 |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 9 | 4 |

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 6 | 7 | 3 |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 6 | 9 |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 1 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 | 8 |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 9 | 4 |

SUKCES!

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 6 | 7 | 3 |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 6 | 9 |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 1 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 | 8 |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 9 | 4 |

SUKCES!

... czy zawsze się uda?

## Uzupełnij kwadrat łaciński!

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 6 | 7 | 3 |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 3 | 4 | 1 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 6 | 9 |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 | 2 | 7 | 1 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 | 3 | 5 | 2 | 8 |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 9 | 4 |

SUKCES!

... czy zawsze się uda?

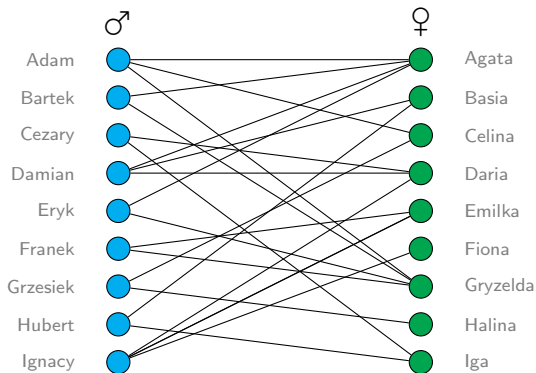
**TAK!** Każdy prostokąt łaciński można uzupełnić do kwadratu łacińskiego.

## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki

|          | ♂ |
|----------|---|
| Adam     | ● |
| Bartek   | ● |
| Cezary   | ● |
| Damian   | ● |
| Eryk     | ● |
| Franek   | ● |
| Grzesiek | ● |
| Hubert   | ● |
| Ignacy   | ● |

| ♀ |          |
|---|----------|
| ● | Agata    |
| ● | Basia    |
| ● | Celina   |
| ● | Daria    |
| ● | Emilka   |
| ● | Fiona    |
| ● | Gryzelda |
| ● | Halina   |
| ● | Iga      |

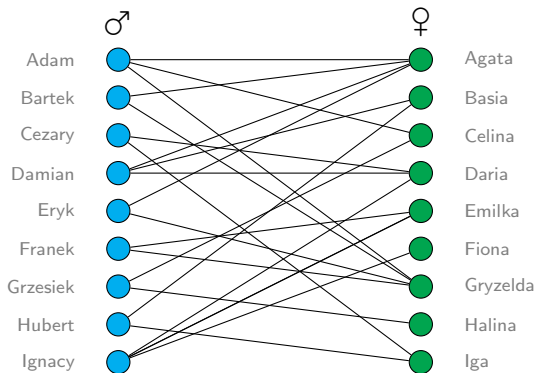
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń



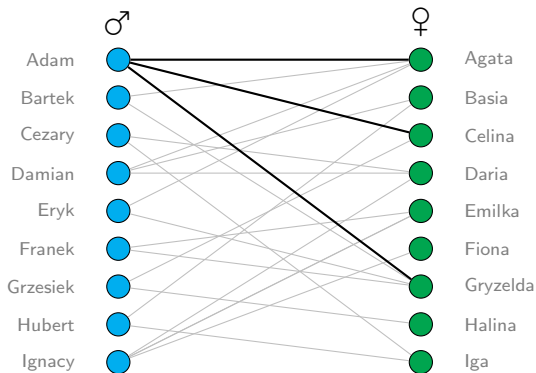
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

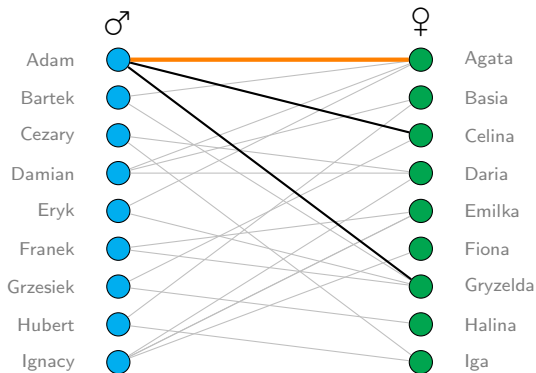
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



—— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

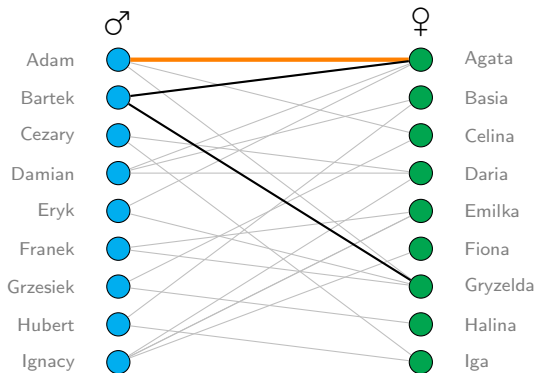
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

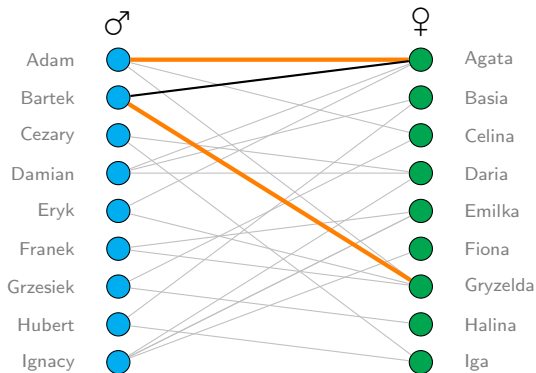
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

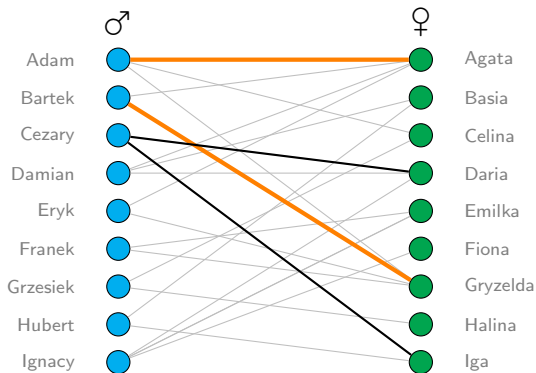
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

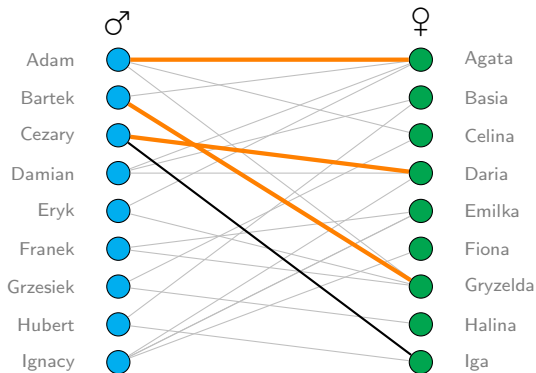
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

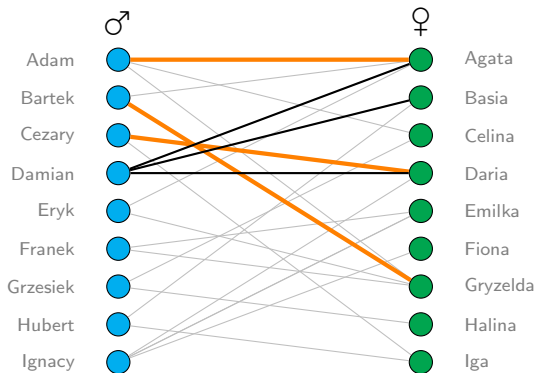
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki

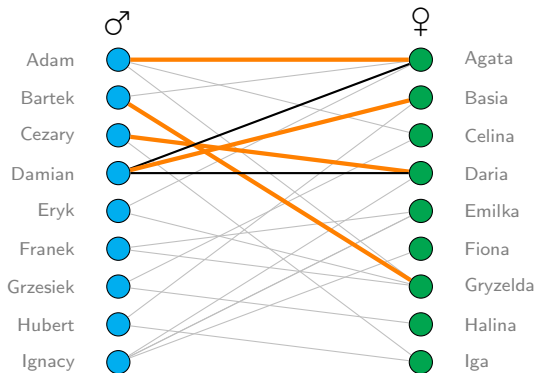


— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?



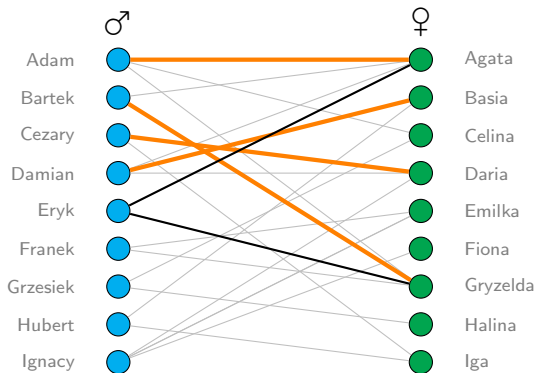
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

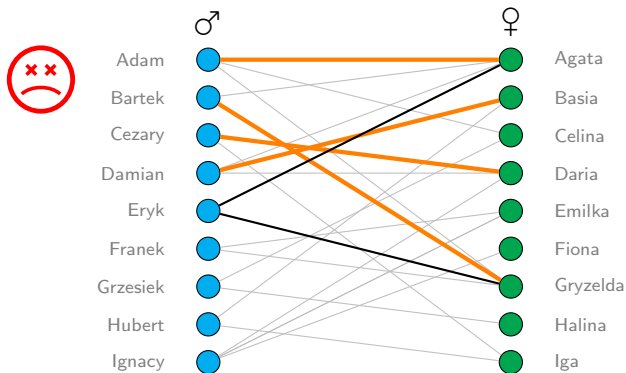
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

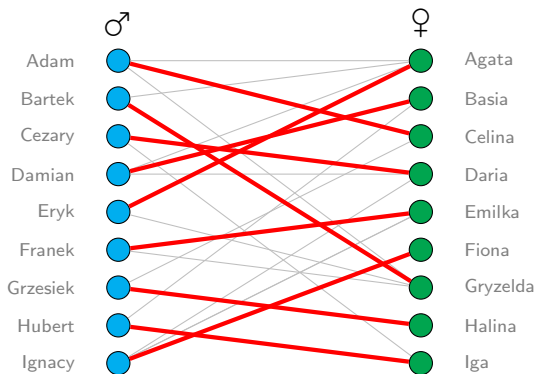
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

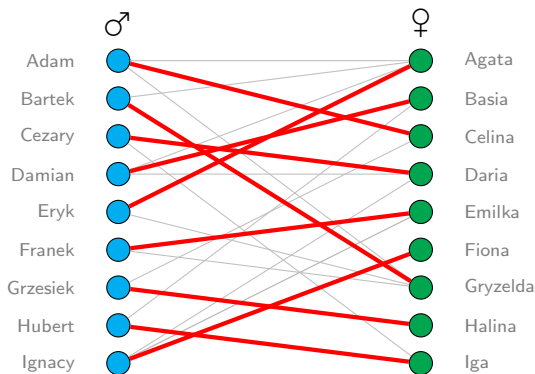
## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki

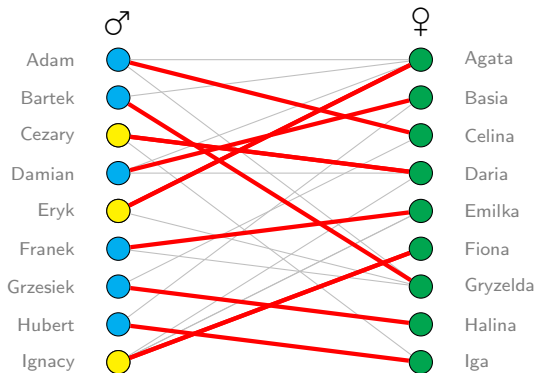


— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

Jeśli można, to każda grupa ♂ lubi co najmniej tak samo liczną grupę ♀!

## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki

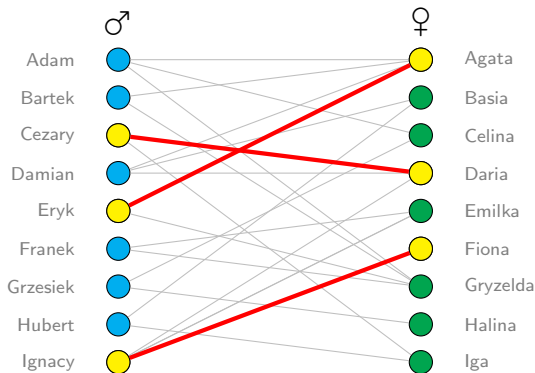


— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

Jeśli można, to każda grupa ♂ lubi co najmniej tak samo liczną grupę ♀!

## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki

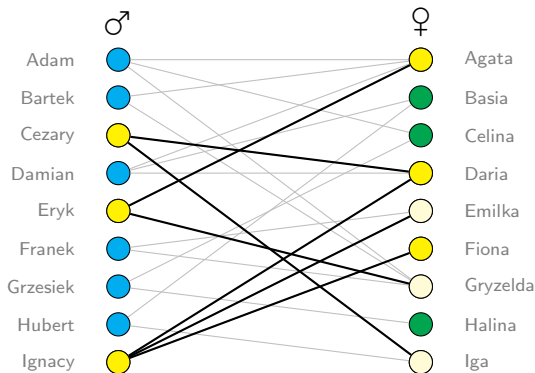


— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

Jeśli można, to każda grupa ♂ lubi co najmniej tak samo liczną grupę ♀!

## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



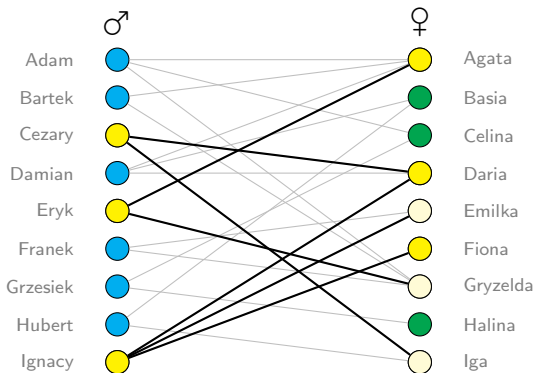
— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

Jeśli można, to każda grupa ♂ lubi co najmniej tak samo liczną grupę ♀!



## Coś (z pozoru) z zupełnie innej beczki



— = przyjaźń

Czy można połączyć ich w zaprzyjaźnione pary?

Jeśli można, to każda grupa ♂ lubi co najmniej tak samo liczną grupę ♀!

**Twierdzenie Halla.** Prawdziwa jest również zależność odwrotna!

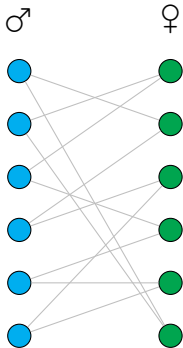
## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

*Dowód.* Załóżmy, że wszyscy mają  $p$  przyjaciół płci przeciwnej.

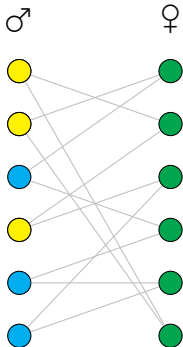


$$p = 2$$

## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

*Dowód.* Załóżmy, że wszyscy mają  $p$  przyjaciół płci przeciwnej.



$$p = 2$$

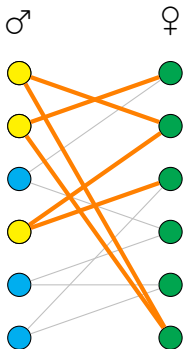
$$k = 3$$

- Wybierzmy dowolnie  $k$  chłopaków.

## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

*Dowód.* Załóżmy, że wszyscy mają  $p$  przyjaciół płci przeciwnej.



$$p = 2$$

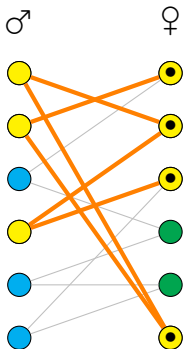
$$k = 3$$

- Wybierzmy dowolnie  $k$  chłopaków.
- Wychodzi od nich dokładnie  $k \cdot p$  krawędzi.

## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

*Dowód.* Załóżmy, że wszyscy mają  $p$  przyjaciół płci przeciwnej.



$$p = 2$$

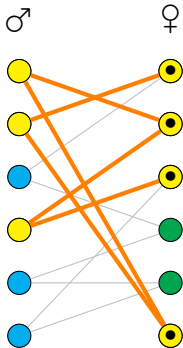
$$k = 3$$

- Wybierzmy dowolnie  $k$  chłopców.
- Wychodzi od nich dokładnie  $k \cdot p$  krawędzi.
- Do każdej z lubianych przez nich dziewczyn dochodzi co najwyżej  $p$  spośród tych krawędzi.

## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

*Dowód.* Załóżmy, że wszyscy mają  $p$  przyjaciół płci przeciwnej.



$$p = 2$$

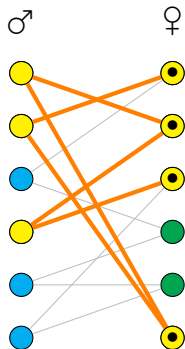
$$k = 3$$

- Wybierzmy dowolnie  $k$  chłopców.
- Wychodzi od nich dokładnie  $k \cdot p$  krawędzi.
- Do każdej z lubianych przez nich dziewczyn dochodzi co najwyżej  $p$  spośród tych krawędzi.
- Zatem znanych dziewczyn jest co najmniej  $(k \cdot p)/p$ , czyli  $k$ .

## Ważny wniosek z twierdzenia Halla

**Wniosek.** Jeśli każdy chłopak i każda dziewczyna mają tyle samo przyjaciół płci przeciwnej, to można ich połączyć w przyjacielskie pary.

*Dowód.* Załóżmy, że wszyscy mają  $p$  przyjaciół płci przeciwnej.



$$p = 2$$

$$k = 3$$

- Wybierzmy dowolnie  $k$  chłopców.
- Wychodzi od nich dokładnie  $k \cdot p$  krawędzi.
- Do każdej z lubianych przez nich dziewczyn dochodzi co najwyżej  $p$  spośród tych krawędzi.
- Zatem znanych dziewczyn jest co najmniej  $(k \cdot p)/p$ , czyli  $k$ .
- Spełniony jest zatem warunek twierdzenia Halla, co kończy dowód.



## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich

|   |   |   |   |   |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|--|--|--|--|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |  |  |  |  |
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |  |  |  |  |
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |  |  |  |  |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |  |  |  |  |
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |  |  |  |  |
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |  |  |  |  |

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 | 1 | 6 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 8 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 9 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 4 | 6 | 1 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 6 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 9 | 8 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 1 | 7 | 4 |
|---|---|---|---|---|

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|

1

2

3

4

5

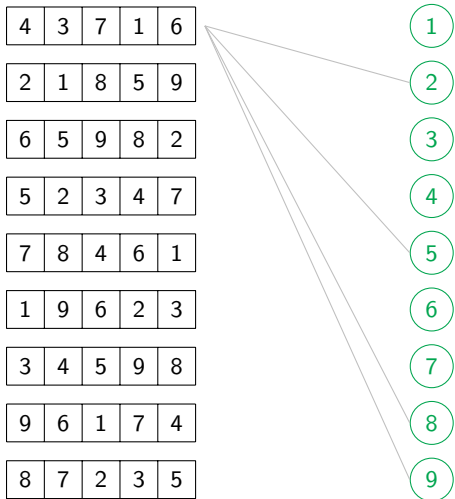
6

7

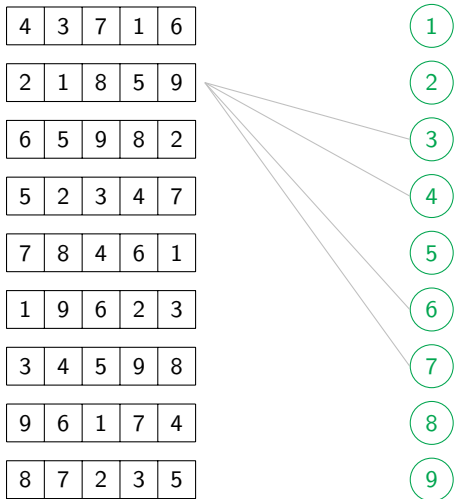
8

9

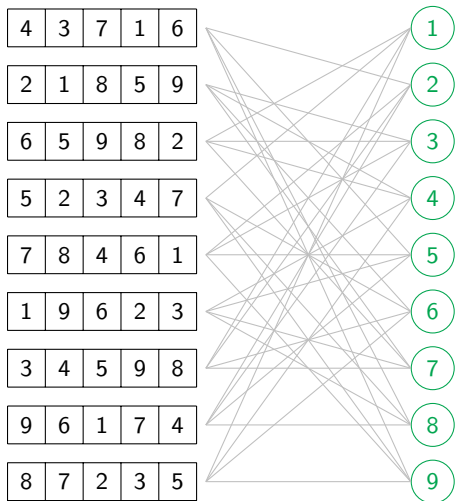
## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



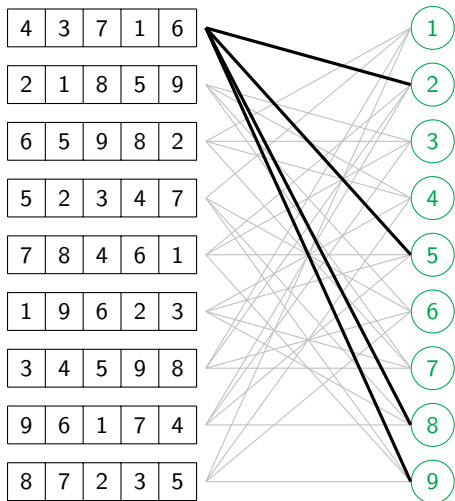
## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



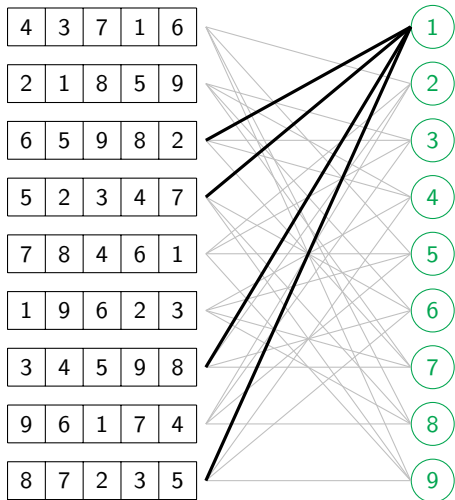
## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



- Z każdego wiersza wychodzą 4 krawędzie.

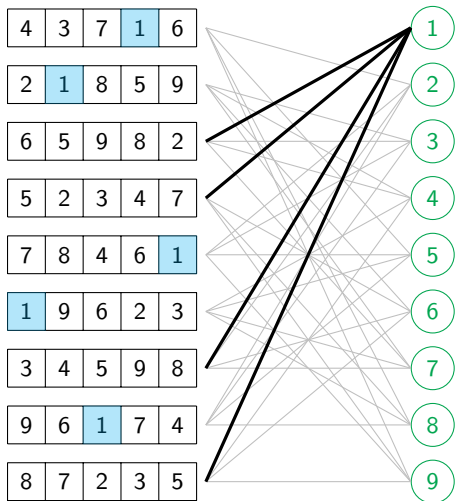


## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



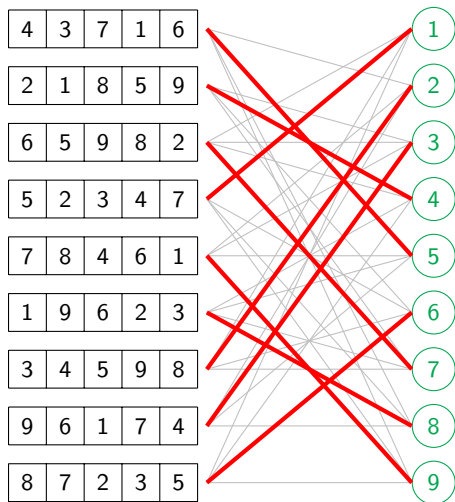
- Z każdego wiersza wychodzą 4 krawędzie.
- Do każdej liczby dochodzą 4 krawędzie.

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



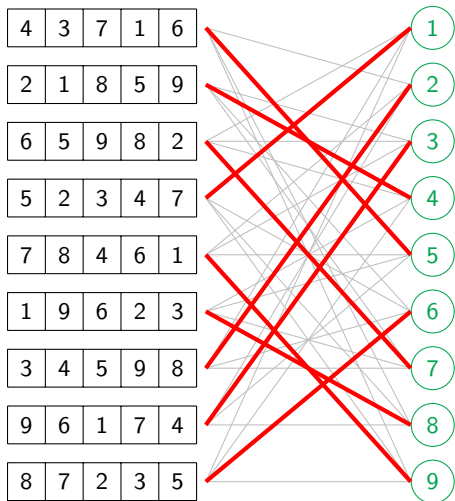
- Z każdego wiersza wychodzą 4 krawędzie.
- Do każdej liczby dochodzą 4 krawędzie.

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



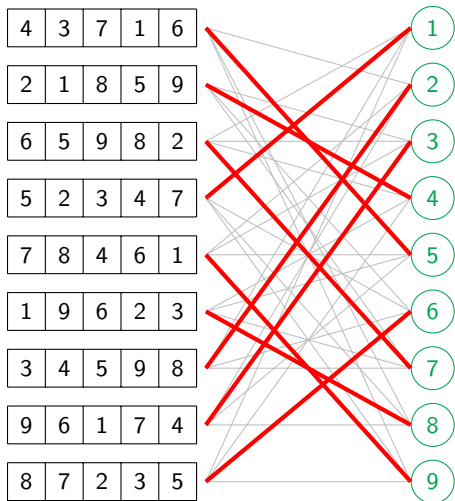
- Z każdego wiersza wychodzą 4 krawędzie.
- Do każdej liczby dochodzą 4 krawędzie.
- Zatem na mocy (wniosku z) twierdzenia Halla istnieje odpowiednie parowanie.

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



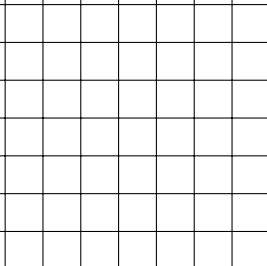
- Z każdego wiersza wychodzą 4 krawędzie.
- Do każdej liczby dochodzą 4 krawędzie.
- Zatem na mocy (wniosku z) twierdzenia Halla istnieje odpowiednie parowanie.
- Określa ona kolejną kolumnę, powiększającą prostokąt łaciński.

## Wracamy do uzupełniania kwadratów łacińskich



- Z każdego wiersza wychodzą 4 krawędzie.
- Do każdej liczby dochodzą 4 krawędzie.
- Zatem na mocy (wniosku z) twierdzenia Halla istnieje odpowiednie parowanie.
- Określa ona kolejną kolumnę, powiększającą prostokąt łaciński.
- Rozumowanie kontynuujemy do otrzymania kwadratu łacińskiego.

Jeszcze o uzupełnianiu...

A large, empty 10x10 grid of squares, intended for drawing a picture.

## Jeszcze o uzupełnianiu...

|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|--|--|--|---|--|--|--|--|--|
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ

## Jeszcze o uzupełnianiu...

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |   |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 9 |  |  |  |  |  |  |  |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ
- Mogę poprawnie wpisać 9 liczb, by nie móc uzupełnić do KŁ



## Jeszcze o uzupełnianiu...

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ
- Mogę poprawnie wpisać 9 liczb, by nie móc uzupełnić do KŁ

## Jeszcze o uzupełnianiu...

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ
- Mogę poprawnie wpisać 9 liczb, by nie móc uzupełnić do KŁ
- Jaka jest najmniejsza liczba liczb, taka że jeśli poprawnie zostaną wpisane w KŁ, to można je uzupełnić do pełnego kwadratu łacińskiego?

## Jeszcze o uzupełnianiu...

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ
- Mogę poprawnie wpisać 9 liczb, by nie móc uzupełnić do KŁ
- Jaka jest najmniejsza liczba liczb, taka że jeśli poprawnie zostaną wpisane w KŁ, to można je uzupełnić do pełnego kwadratu łacińskiego?

**Twierdzenie.** (*Smetaniuk, 1981*) Jeśli w kwadrat  $n \times n$  zostanie poprawnie wpisane  $n - 1$  liczb, to można ten układ uzupełnić do kwadratu łacińskiego.

## Jeszcze o uzupełnianiu...

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ
- Mogę poprawnie wpisać 9 liczb, by nie móc uzupełnić do KŁ
- Jaka jest najmniejsza liczba liczb, taka że jeśli poprawnie zostaną wpisane w KŁ, to można je uzupełnić do pełnego kwadratu łacińskiego?

**Twierdzenie.** (*Smetaniuk, 1981*) Jeśli w kwadrat  $n \times n$  zostanie poprawnie wpisane  $n - 1$  liczb, to można ten układ uzupełnić do kwadratu łacińskiego.

*Uwaga.* Dowód jest konstruktywny – podaje przepis, jak to zrobić.

## Jeszcze o uzupełnianiu...

|   |   |   |   |  |  |  |  |   |
|---|---|---|---|--|--|--|--|---|
|   |   |   |   |  |  |  |  | 3 |
|   |   | 3 |   |  |  |  |  |   |
|   |   |   | 2 |  |  |  |  |   |
|   |   |   |   |  |  |  |  |   |
|   |   | 9 |   |  |  |  |  |   |
|   | 2 |   |   |  |  |  |  |   |
| 1 |   |   |   |  |  |  |  |   |
|   |   |   | 7 |  |  |  |  | 4 |
|   |   |   |   |  |  |  |  |   |

- Jeśli wpiszę dowolnie jedną liczbę, mogę uzupełnić do KŁ
- Mogę poprawnie wpisać 9 liczb, by nie móc uzupełnić do KŁ
- Jaka jest najmniejsza liczba liczb, taka że jeśli poprawnie zostaną wpisane w KŁ, to można je uzupełnić do pełnego kwadratu łacińskiego?

**Twierdzenie.** (*Smetaniuk, 1981*) Jeśli w kwadrat  $n \times n$  zostanie poprawnie wpisane  $n - 1$  liczb, to można ten układ uzupełnić do kwadratu łacińskiego.

*Uwaga.* Dowód jest konstruktywny – podaje przepis, jak to zrobić.

## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Nic szczególnego?

## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Nic szczególnego? Połączmy je w jeden!



## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Nic szczególnego? Połączmy je w jeden!

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (2, 4) | (3, 2) | (4, 5) | (5, 3) |
| (2, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (5, 1) | (1, 4) |
| (3, 3) | (4, 1) | (5, 4) | (1, 2) | (2, 5) |
| (4, 4) | (5, 2) | (1, 5) | (2, 3) | (3, 1) |
| (5, 5) | (1, 3) | (2, 1) | (3, 4) | (4, 2) |

## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Nic szczególnego? Połączmy je w jeden!

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (2, 4) | (3, 2) | (4, 5) | (5, 3) |
| (2, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (5, 1) | (1, 4) |
| (3, 3) | (4, 1) | (5, 4) | (1, 2) | (2, 5) |
| (4, 4) | (5, 2) | (1, 5) | (2, 3) | (3, 1) |
| (5, 5) | (1, 3) | (2, 1) | (3, 4) | (4, 2) |

Żadna para się nie powtarza!

## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Nic szczególnego? Połączmy je w jeden!

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (2, 4) | (3, 2) | (4, 5) | (5, 3) |
| (2, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (5, 1) | (1, 4) |
| (3, 3) | (4, 1) | (5, 4) | (1, 2) | (2, 5) |
| (4, 4) | (5, 2) | (1, 5) | (2, 3) | (3, 1) |
| (5, 5) | (1, 3) | (2, 1) | (3, 4) | (4, 2) |

Żadna para się nie powtarza! Równoważnie: w połączonym kwadracie występuje każda możliwa para.

## Dwa niepozorne kwadraty łacińskie $5 \times 5$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

Nic szczególnego? Połączmy je w jeden!

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (2, 4) | (3, 2) | (4, 5) | (5, 3) |
| (2, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (5, 1) | (1, 4) |
| (3, 3) | (4, 1) | (5, 4) | (1, 2) | (2, 5) |
| (4, 4) | (5, 2) | (1, 5) | (2, 3) | (3, 1) |
| (5, 5) | (1, 3) | (2, 1) | (3, 4) | (4, 2) |

Żadna para się nie powtarza! Równoważnie: w połączonym kwadracie występuje każda możliwa para.

Taki układ nazwiemy kwadratem grecko-łacińskim.

## Kwadrat grecko-łaciński dla $n = 3$ i $n = 4$

Dla  $n = 4$  jest to XVIII-wieczna łamigłówka (Jacques Ozanam, 1725):

*Ułożyć karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty.*

## Kwadrat grecko-łaciński dla $n = 3$ i $n = 4$

Dla  $n = 4$  jest to XVIII-wieczna łamigłówka (Jacques Ozanam, 1725):

*Ułożyć karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty.*

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| A♠ | K♥ | Q♦ | J♣ |
| Q♣ | J♦ | A♥ | K♠ |
| J♥ | Q♠ | K♣ | A♦ |
| K♦ | A♣ | J♠ | Q♥ |

## Kwadrat grecko-łaciński dla $n = 3$ i $n = 4$

Dla  $n = 4$  jest to XVIII-wieczna łamigłówka (Jacques Ozanam, 1725):

*Ułożyć karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty.*

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | K | Q | J |
| Q | J | A | K |
| J | Q | K | A |
| K | A | J | Q |

- Figury tworzą kwadrat łaciński

## Kwadrat grecko-łaciński dla $n = 3$ i $n = 4$

Dla  $n = 4$  jest to XVIII-wieczna łamigłówka (Jacques Ozanam, 1725):

*Ułożyć karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty.*



- Figury tworzą kwadrat łaciński
- Kolory tworzą kwadrat łaciński



## Kwadrat grecko-łaciński dla $n = 3$ i $n = 4$

Dla  $n = 4$  jest to XVIII-wieczna łamigłówka (Jacques Ozanam, 1725):

*Ułożyć karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty.*

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| A♠ | K♥ | Q♦ | J♣ |
| Q♣ | J♦ | A♥ | K♠ |
| J♥ | Q♠ | K♣ | A♦ |
| K♦ | A♣ | J♠ | Q♥ |

- Figury tworzą kwadrat łaciński
- Kolory tworzą kwadrat łacinski
- Żadna kombinacja się nie powtarza (bo nie powtarza się w talii)

## Kwadrat grecko-łaciński dla $n = 3$ i $n = 4$

Dla  $n = 4$  jest to XVIII-wieczna łamigłówka (Jacques Ozanam, 1725):

*Ułożyć karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty.*

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| A♠ | K♥ | Q♦ | J♣ |
| Q♣ | J♦ | A♥ | K♠ |
| J♥ | Q♠ | K♣ | A♦ |
| K♦ | A♣ | J♠ | Q♥ |

- Figury tworzą kwadrat łaciński
- Kolory tworzą kwadrat łaciński
- Żadna kombinacja się nie powtarza (bo nie powtarza się w talii)

Dla  $n = 3$  rozwiązanie to na przykład:

|        |        |        |
|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (2, 3) | (3, 2) |
| (2, 2) | (3, 1) | (1, 3) |
| (3, 3) | (1, 2) | (2, 1) |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :



## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |



## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |  |
|---|--|
| 2 |  |
| 1 |  |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

Nie ma takiej możliwości!

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

Nie ma takiej możliwości!

Dla  $n = 6$  jest to zagadka, którą podobno caryca Katarzyna Wielka przesała Leonhardowi Eulerowi:

*Ułożyć 36 oficerów z 6 różnych pułków w kwadracie tak, aby w każdej linii poziomej i pionowej było 6 oficerów różnych stopni i różnych pułków.*

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

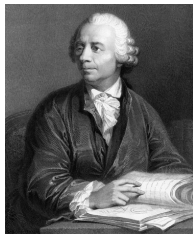
|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

Nie ma takiej możliwości!

Dla  $n = 6$  jest to zagadka, którą podobno caryca Katarzyna Wielka przesłała Leonhardowi Eulerowi:

*Ułożyć 36 oficerów z 6 różnych pułków w kwadracie tak, aby w każdej linii poziomej i pionowej było 6 oficerów różnych stopni i różnych pułków.*



Leonhard Euler, 1707–1783

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

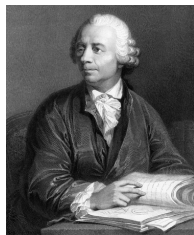
|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

Nie ma takiej możliwości!

Dla  $n = 6$  jest to zagadka, którą podobno caryca Katarzyna Wielka przesała Leonhardowi Eulerowi:

*Ułożyć 36 oficerów z 6 różnych pułków w kwadracie tak, aby w każdej linii poziomej i pionowej było 6 oficerów różnych stopni i różnych pułków.*



Leonhard Euler, 1707–1783

- Euler nie potrafił znaleźć rozwiązania

## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

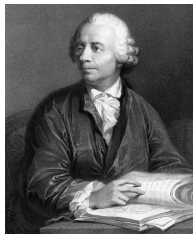
|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

Nie ma takiej możliwości!

Dla  $n = 6$  jest to zagadka, którą podobno caryca Katarzyna Wielka przesała Leonhardowi Eulerowi:

*Ułożyć 36 oficerów z 6 różnych pułków w kwadracie tak, aby w każdej linii poziomej i pionowej było 6 oficerów różnych stopni i różnych pułków.*



Leonhard Euler, 1707–1783

- Euler nie potrafił znaleźć rozwiązania
- Udowodnił jednak, że rozwiązanie istnieje dla  $n$  nieparzystych i podzielnych przez 4



## Kwadraty grecko-łacińskie dla $n = 2$ i $n = 6$

Spróbujmy skonstruować kwadrat grecko-łaciński dla  $n = 2$ :

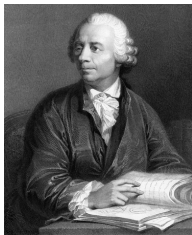
|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

Nie ma takiej możliwości!

Dla  $n = 6$  jest to zagadka, którą podobno caryca Katarzyna Wielka przesała Leonhardowi Eulerowi:

*Ułożyć 36 oficerów z 6 różnych pułków w kwadracie tak, aby w każdej linii poziomej i pionowej było 6 oficerów różnych stopni i różnych pułków.*



Leonhard Euler, 1707–1783

- Euler nie potrafił znaleźć rozwiązania
- Udowodnił jednak, że rozwiązanie istnieje dla  $n$  nieparzystych i podzielnych przez 4
- Postawił zatem **hipotezę**, że dla pozostałych  $n$  (w tym dla  $n = 6$ ) jest to **niemożliwe**

## Zmagania z hipotezą Eulera

## Zmagania z hipotezą Eulera

- W 1901 roku Gaston Tarry opublikował pracę z dowodem, że problem 36 oficerów nie ma rozwiązania.

## Zmagania z hipotezą Eulera

- W 1901 roku Gaston Tarry opublikował pracę z dowodem, że problem 36 oficerów nie ma rozwiązania.
- W 1959 roku R.C. Bose and S. S. Shrikhande znaleźli przykłady kwadratów grecko-łacińskich rozmiaru 22, obalając w ten sposób hipotezę Eulera.

## Zmagania z hipotezą Eulera

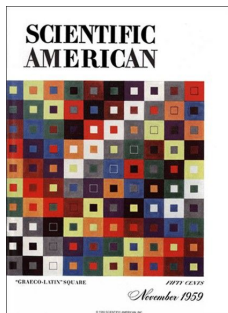
- W 1901 roku Gaston Tarry opublikował pracę z dowodem, że problem 36 oficerów nie ma rozwiązania.
- W 1959 roku R.C. Bose and S. S. Shrikhande znaleźli przykłady kwadratów grecko-łacińskich rozmiaru 22, obalając w ten sposób hipotezę Eulera.
- Również w 1959 roku E. T. Parker znalazł przykład kwadratu grecko-łacińskiego rozmiaru 10.

## Zmagania z hipotezą Eulera

- W 1901 roku Gaston Tarry opublikował pracę z dowodem, że problem 36 oficerów nie ma rozwiązania.
- W 1959 roku R.C. Bose and S. S. Shrikhande znaleźli przykłady kwadratów grecko-łacińskich rozmiaru 22, obalając w ten sposób hipotezę Eulera.
- Również w 1959 roku E. T. Parker znalazł przykład kwadratu grecko-łacińskiego rozmiaru 10.
- Jeszcze w 1959 roku cała trójka udowodniła, że kwadraty grecko-łacińskie istnieją dla wszystkich  $n > 6$ .

## Zmagania z hipotezą Eulera

- W 1901 roku Gaston Tarry opublikował pracę z dowodem, że problem 36 oficerów nie ma rozwiązania.
- W 1959 roku R.C. Bose and S. S. Shrikhande znaleźli przykłady kwadratów grecko-łacińskich rozmiaru 22, obalając w ten sposób hipotezę Eulera.
- Również w 1959 roku E. T. Parker znalazł przykład kwadratu grecko-łacińskiego rozmiaru 10.
- Jeszcze w 1959 roku cała trójka udowodniła, że kwadraty grecko-łacińskie istnieją dla wszystkich  $n > 6$ .



## Jeszcze więcej kwadratów grecko-łacińskich!

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |



## Jeszcze więcej kwadratów grecko-łacińskich!

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Co w tym specjalnego?

## Jeszcze więcej kwadratów grecko-łacińskich!

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Co w tym specjalnego?

Każde dwa tworzą kwadrat grecko-łaciński!

## Jeszcze więcej kwadratów grecko-łacińskich!

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Co w tym specjalnego?

Każde dwa tworzą kwadrat grecko-łaciński!

Taki układ kwadratów nazwiemy wzajemnie ortogonalnym.

## Jeszcze więcej kwadratów grecko-łacińskich!

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Co w tym specjalnego?

Każde dwa tworzą kwadrat grecko-łaciński!

Taki układ kwadratów nazwiemy wzajemnie ortogonalnym.

Jak wiele takich kwadratów można wybrać?

## Jeszcze więcej kwadratów grecko-łacińskich!

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Co w tym specjalnego?

Każde dwa tworzą kwadrat grecko-łaciński!

Taki układ kwadratów nazwiemy wzajemnie ortogonalnym.

Jak wiele takich kwadratów można wybrać?

**Twierdzenie.** Istnieje co najwyżej  $n - 1$  kwadratów  $n \times n$ , z których każde dwa tworzą kwadrat grecko-łaciński.

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 1 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 2 |



|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 1 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 2 |



|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |



## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 1 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 2 |



|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

### Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

$$\left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.
- W niebieskich polach są liczby większe od 1.

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.
- W niebieskich polach są liczby większe od 1.
- W niebieskich polach są **różne** liczby!

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.
- W niebieskich polach są liczby większe od 1.
- W niebieskich polach są **różne** liczby!

## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.
- W niebieskich polach są liczby większe od 1.
- W niebieskich polach są **różne** liczby!  
Gdyby w dwóch kwadratach pojawiała się na tym miejscu liczba  $d$ , to para  $(d, d)$  pojawiałaby się w ich połączeniu co najmniej dwukrotnie.



## Dowód twierdzenia

Rozważmy dowolny zbiór wzajemnie ortogonalnych kwadratów:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

(...)

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

- Uczesaniem kwadratu nazwijmy takie „przeetykietowanie” występujących w nim liczb, by w pierwszym wierszu były uporządkowane rosnąco.
- Jeśli uczesamy wszystkie kwadraty, ciągle będą wzajemnie ortogonalne.
- W niebieskich polach są liczby większe od 1.
- W niebieskich polach są **różne** liczby!  
Gdyby w dwóch kwadratach pojawiała się na tym miejscu liczba  $d$ , to para  $(d, d)$  pojawiałaby się w ich połączeniu co najmniej dwukrotnie.
- W tej sytuacji kwadratów jest co najwyżej  $n - 1$ .

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

$3 \cdot 2 + 4$  daje resztę 0 z  
dzielenia przez 5

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

$3 \cdot 2 + 4$  daje resztę 0 z  
dzielenia przez 5

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

- Co do zasady podobną konstrukcję można przeprowadzić, jeśli  $n$  jest potęgą liczby pierwszej.

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

$3 \cdot 2 + 4$  daje resztę 0 z  
dzielenia przez 5

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

- Co do zasady podobną konstrukcję można przeprowadzić, jeśli  $n$  jest potęgą liczby pierwszej.
- W 1991 roku udowodniono, że nie istnieje 9 wzajemnie ortogonalnych kwadratów rzędu 10.

## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

$3 \cdot 2 + 4$  daje resztę 0 z  
dzielenia przez 5

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

- Co do zasady podobną konstrukcję można przeprowadzić, jeśli  $n$  jest potęgą liczby pierwszej.
- W 1991 roku udowodniono, że nie istnieje 9 wzajemnie ortogonalnych kwadratów rzędu 10.
- *O pozostałych wartościach  $n$  nic nie wiadomo!*



## A kiedy istnieje ich $n - 1$ ?

$3 \cdot 2 + 4$  daje resztę 0 z  
dzielenia przez 5

- Już wiemy, że dla  $n = 6$  to nie jest prawda (wtedy nie istnieją nawet dwa)
- Jeśli  $n$  jest liczbą pierwszą oraz dla  $k = 1, \dots, (n - 1)$  w  $k$ -tym kwadracie na miejscu  $(i, j)$  znajduje się reszta z dzielenia  $k \cdot i + j$  przez  $n$ , to kwadraty te są wzajemnie ortogonalne:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

- Co do zasady podobną konstrukcję można przeprowadzić, jeśli  $n$  jest potęgą liczby pierwszej.
- W 1991 roku udowodniono, że nie istnieje 9 wzajemnie ortogonalnych kwadratów rzędu 10.
- *O pozostałych wartościach  $n$  nic nie wiadomo!*  
W szczególności nie wiadomo, czy istnieje 11 kwadratów wzajemnie ortogonalnych rzędu 12.

Delta 7/2024

## Kwadraty grecko-łacińskie i płaszczyzny rzutowe

Karol Gryszka

matematyka

kombinatoryka

Drogi Czytelniku, spróbuj wskazać jakieś nieprzeciętne cechy poniższych dwóch układów liczb, wpisanych w tablice o wymiarach  $5 \times 5$ .

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |

W obu przypadkach umieszczono liczby od 1 do 5, każda pojawia się pięciokrotnie – ciężko to jednak uznać za „nieprzeciętne cechy”. Istotniejsze jest to, że w każdym wierszu i każdej kolumnie pojawia się pełen zestaw liczb od 1 do 5. Dzięki temu oba układy zasługują na miano *kwadratów łacińskich*. Najistotniejszym zaś jest dla nas to, co ukazuje się naszym oczom po sparowaniu liczb stojących w odpowiednich polach tych tablic.

Afiliacja: Wydział Nauk Ścisłych  
i Przyrodniczych,  
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie



Znajdziecie go na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)! :-)

Delta 3/2023



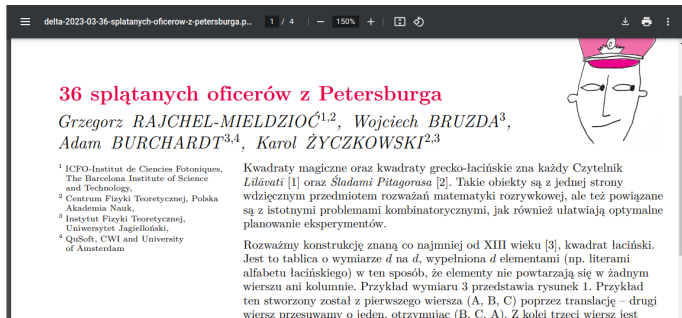
## 36 spletanych oficerów z Petersburga

Wojciech Bruzda, Adam Burchardt, Grzegorz Rajchel-Mieldzioć i Karol Życzkowski

fizyka

fizyka kwantowa

kombinatoryka



The screenshot shows the article page on the delta website. At the top, there is a navigation bar with a menu icon, the URL 'delta-2023-03-36-spletanych-oficerow-z-petersburga.p...', a page indicator '1 / 4', a zoom level '150%', and icons for download, print, and share. The article title '36 spletanych oficerów z Petersburga' is displayed in red. Below it, the authors' names are listed: 'Grzegorz RAJCHEL-MIELDZIOĆ<sup>1,2</sup>, Wojciech BRUZDA<sup>3</sup>, Adam BURCHARDT<sup>3,4</sup>, Karol ŻYCZKOWSKI<sup>2,3</sup>'. To the right of the text is a cartoon illustration of a man's face wearing a pink cap. The main text of the article begins with 'Kwadraty magiczne oraz kwadraty grecko-lacińskie zna każdy Czytelnik Liliavati [1] oraz Śladami Pitagorasa [2].'. The first footnote identifies ICFO-Institut de Ciències Fotòniques as The Barcelona Institute of Science and Technology. The second footnote identifies the Centrum Fizyki Teoretycznej at the Polish Academy of Sciences. The third footnote identifies the Institute of Physics at Jagielloński University. The fourth footnote identifies QuSoft, CWI and University of Amsterdam.

36 spletanych oficerów z Petersburga

Grzegorz RAJCHEL-MIELDZIOĆ<sup>1,2</sup>, Wojciech BRUZDA<sup>3</sup>,  
Adam BURCHARDT<sup>3,4</sup>, Karol ŻYCZKOWSKI<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> ICFO-Institut de Ciències Fotòniques,  
The Barcelona Institute of Science  
and Technology.

<sup>2</sup> Centrum Fizyki Teoretycznej, Polska  
Akademia Nauk.

<sup>3</sup> Instytut Fizyki Teoretycznej,  
Uniwersytet Jagielloński,

<sup>4</sup> QuSoft, CWI and University  
of Amsterdam

Kwadraty magiczne oraz kwadraty grecko-lacińskie zna każdy Czytelnik *Lilāvati* [1] oraz *Śladami Pitagorasa* [2]. Takie obiekty są z jednej strony wdzięcznym przedmiotem rozważań matematyki rozrywkowej, ale też powiązane są z istotnymi problemami kombinatorycznymi, jak również ułatwiają optymalne planowanie eksperymentów.

Rozważmy konstrukcję znaną co najmniej od XIII wieku [3], kwadrat laciński. Jest to tablica o wymiarze  $d$  na  $d$ , wypełniona  $d$  elementami (np. literami alfabetu lacińskiego) w ten sposób, że elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie. Przykład wymiaru 3 przedstawia rysunek 1. Przykład ten stworzony został z pierwszego wiersza (A, B, C) poprzez translację – drugi wiersz przesuwamy o jeden, otrzymując (B, C, A). Z kolei trzeci wiersz jest

Znajdziecie go na stronie [deltami.edu.pl](https://deltami.edu.pl)! :-)

**Dziękuję za uwagę!**