

Pięć dość prostych

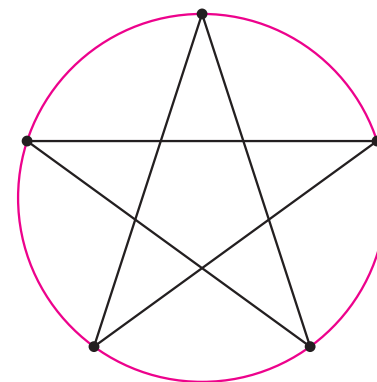
i

pięć bardziej zawitych

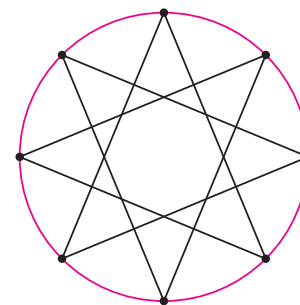
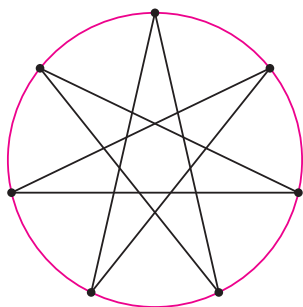
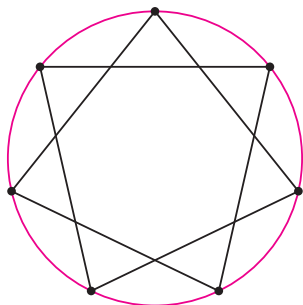
opowiadań o pięciu

P1. Pentagram

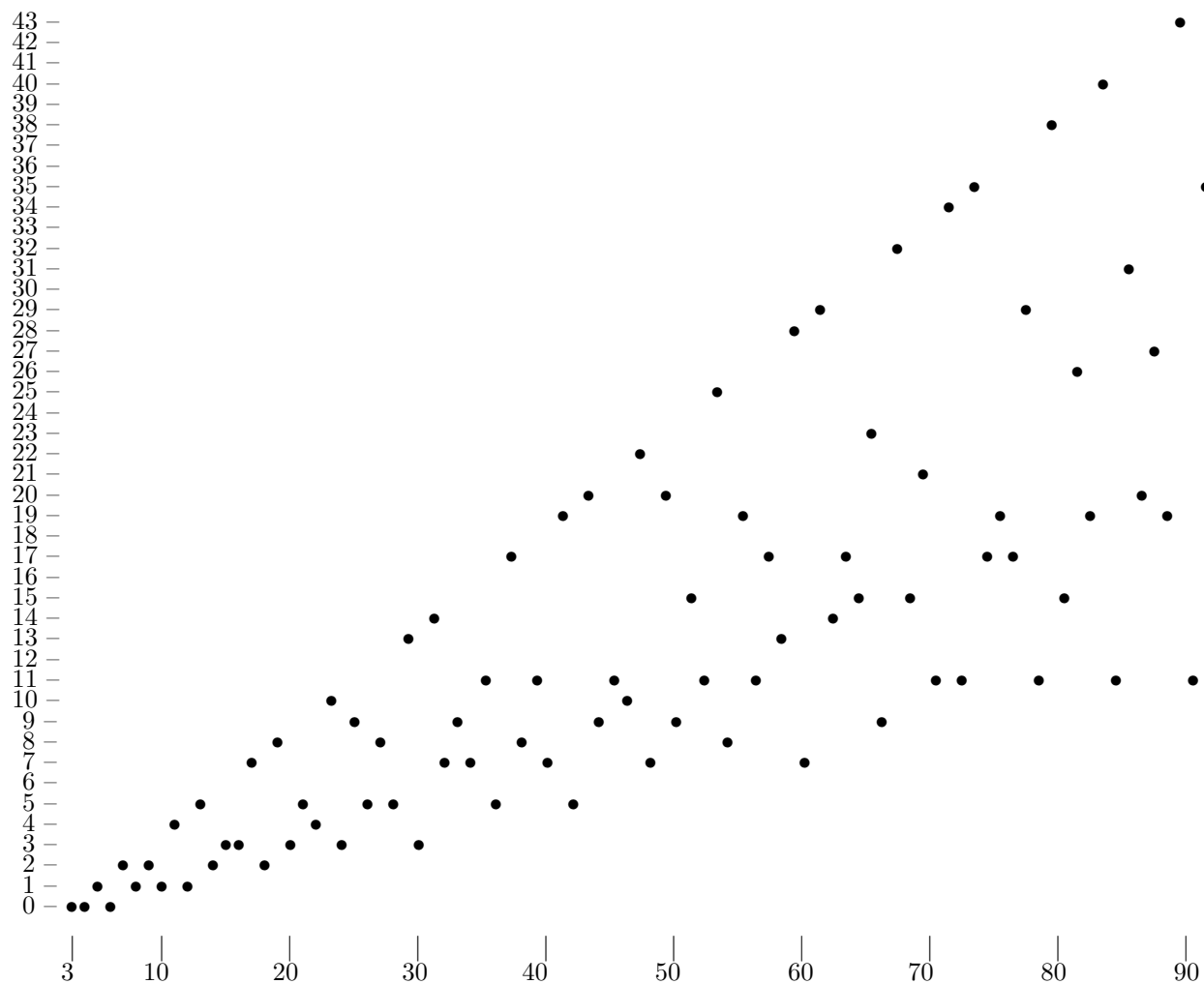
najmniejszy foremny wielokąt gwiaździsty,
czyli gwiazda pięcioramienna;



takiej gwiazdy sześcioramiennej nie ma
(gwiazda Dawida jest inna),
siedmioramienne są dwie, a ośmioramienna znów jedna.



Ile jest gwiazd o n ramionach,
obliczył dopiero Leonard Euler 250 lat temu;



oto wykres jaki otrzymał.

Dla lubiących wzory:

$$\star(n) = \frac{n}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) - 1,$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ to wszystkie dzielniki pierwsze n .

P2. Złota proporcja

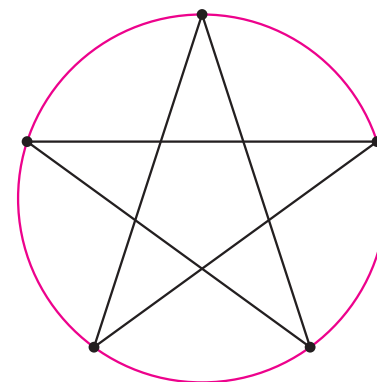
Stosunek
poszczególnych odcinków pentagramu
to **złota proporcja**, czyli

$$\frac{\text{odcinek}}{\text{jego część}} = \frac{\text{ta część}}{\text{reszta}};$$

jeśli obliczymy, to okaże się, że

złota część to $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ całego odcinka,

a cały odcinek to $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ swojej złotej części.



P2. Złota proporcja

Stosunek
poszczególnych odcinków pentagramu
to **złota proporcja**, czyli

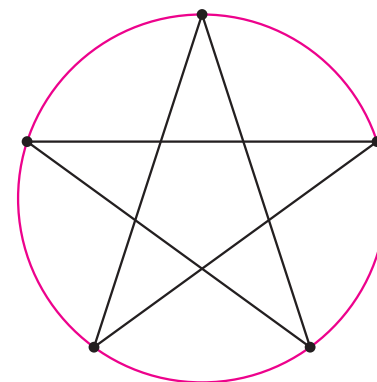
$$\frac{\text{odcinek}}{\text{jego część}} = \frac{\text{ta część}}{\text{reszta}};$$

jeśli obliczymy, to okaże się, że

złota część to $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ całego odcinka,

a cały odcinek to $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ swojej złotej części.

Złotą proporcję można odszukać w wielu zjawiskach przyrody,
Fidiasz i Praksyteles uczynili z niej kanon piękna ludzkiego ciała.



800 lat temu powstały

związane z obiema liczbowymi postaciami złotej proporcji

liczby

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Mimo dziwnego wyglądu są to liczby całkowite:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

— każda jest sumą dwóch ją poprzedzających.

800 lat temu powstały

związane z obiema liczbowymi postaciami złotej proporcji

liczby
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Mimo dziwnego wyglądu są to liczby całkowite:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

— każda jest sumą dwóch ją poprzedzających.

Wpadł na ich trop Leonardo Bonacci z Pizy (zwany Fibonacci)
i zanotował to w postaci zadania:

*Ile par królików będzie potomstwem jednej pary po n miesiącach,
jeśli każda para rodzi nową parę po miesiącu
i króliki stają się po miesiącu płodne
(uwaga: śmierć królika nie dotyka!).*

P3. Piąty żywioł Platona

Pitagorejski kult liczby 4

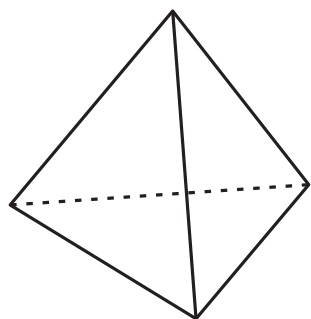
miał wpływ na wszelkie koncepcje struktury świata

— Demokryt też mu uległ tworząc teorię,

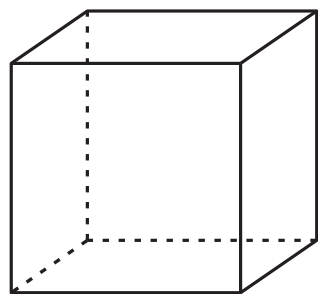
w myśl której wszystko, co istnieje,

jest kombinacją czterech żywiołów: ziemi, wody, powietrza i ognia.

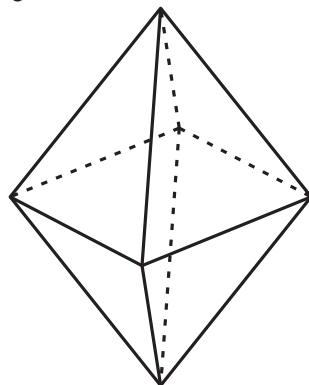
A ponieważ znano też cztery wielościany foremne,



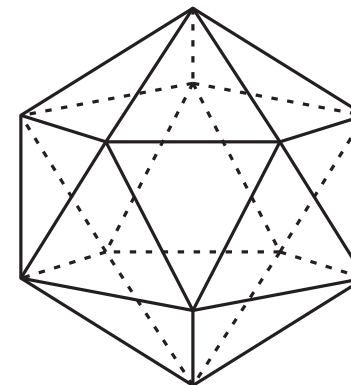
czworościan



sześcian



ośmiościan



dwudziestościan

więc uznano je za matematyczne odpowiedniki żywiołów:

ogień

ziemia

powietrze

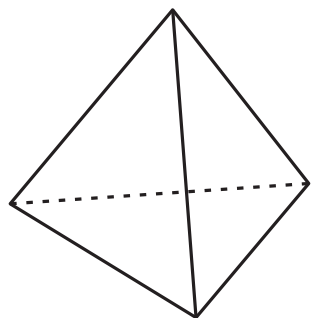
woda

Platon (jak dwa i pół tysiąclecia później Luc Besson)
wytknął brak piątego żywiołu:
zgadzał się na to, iż z demokrytowych czterech
można uzyskać wszystko na świecie, jednak nie człowieka!

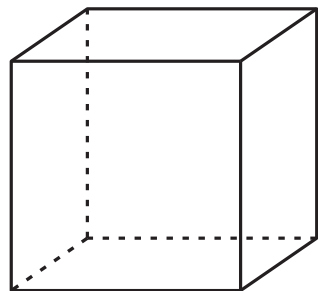
Do tego potrzebny jest jeszcze **duch**!

Zażądał więc, by mu znaleziono ... **piąty** wielościan foremny.

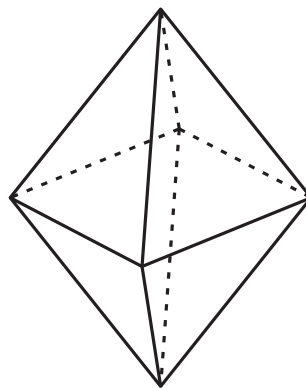
I ateński matematyk Teajtetos znalazł: to dwunastościan,



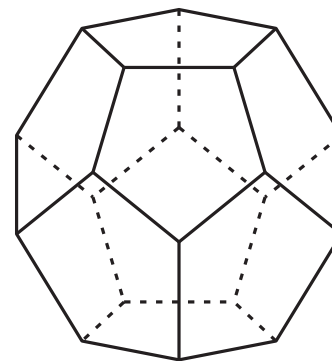
czworościan



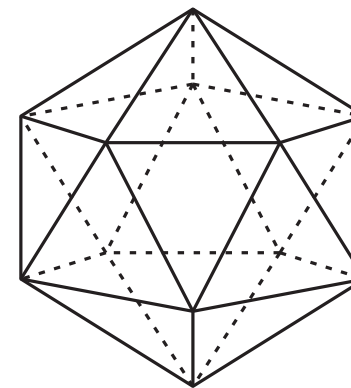
sześcián



ośmiościan



dwunastościan

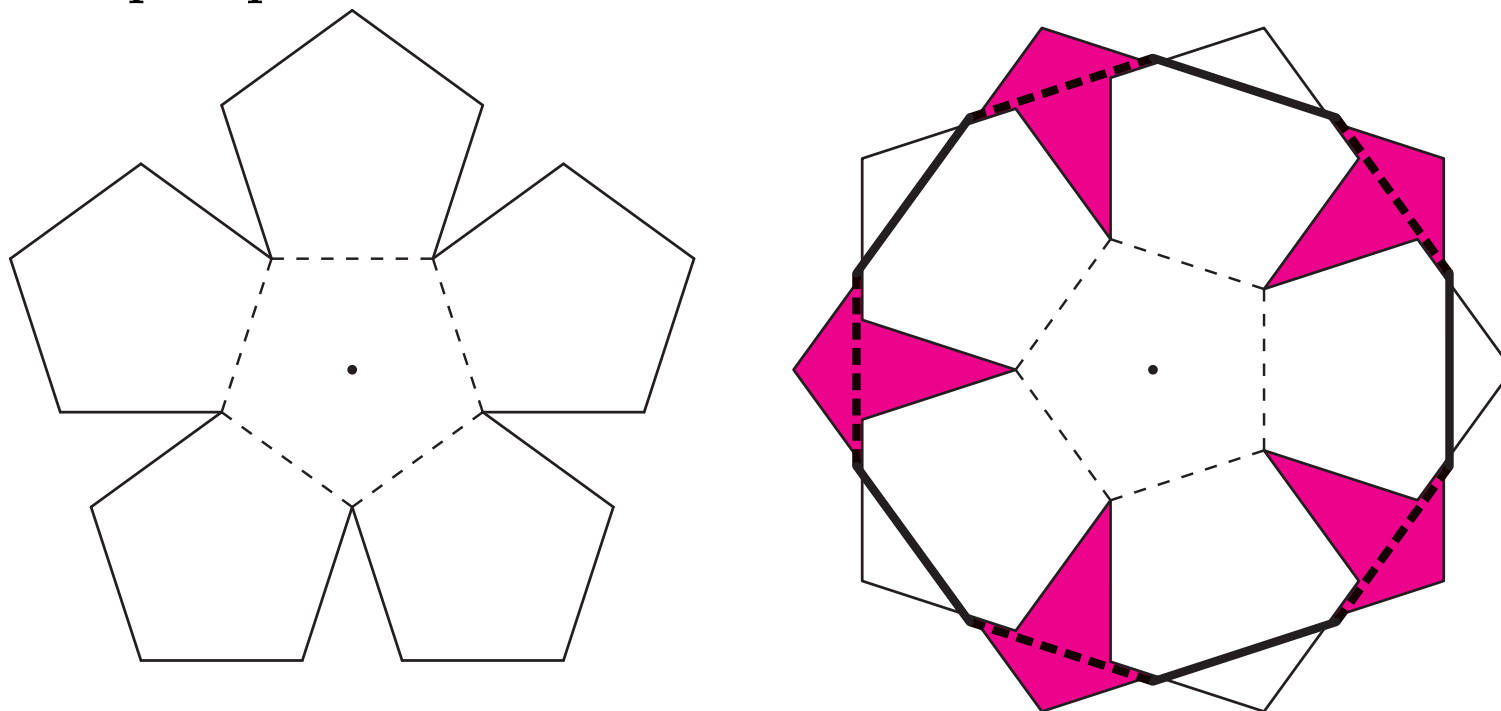


dwudziestościan

oczywiście, zbudowany z **pięciokątów**!

Dwunastościan można przechowywać w zeszycie, ale tak, że po otwarciu wyrośnie na stronie w pełnej trójwymiarowej postaci.

Oto przepis:



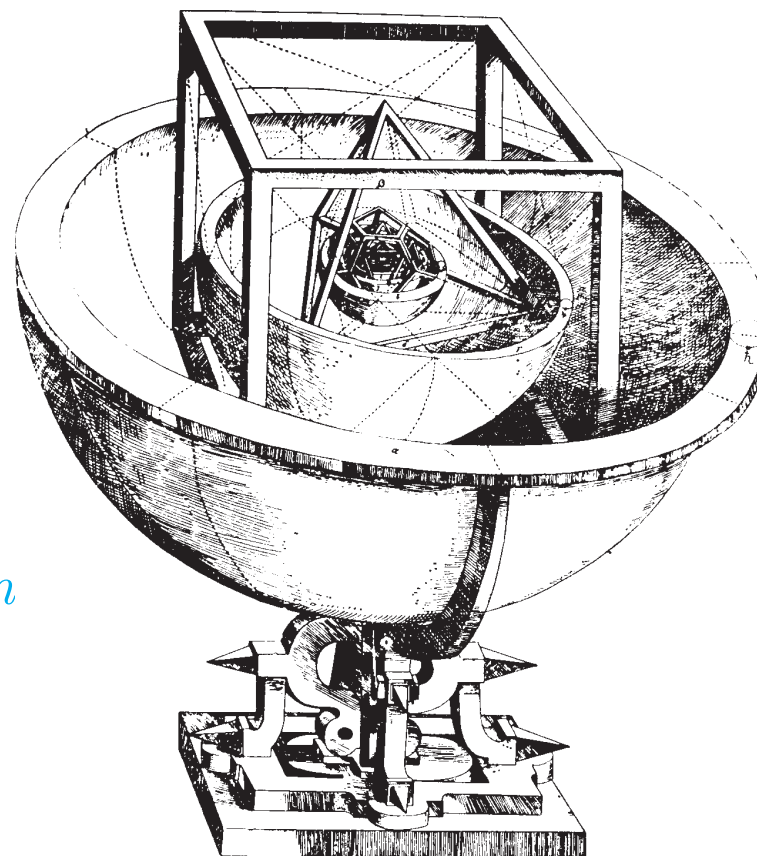
*Z tekturki wytnij dwie takie figury, jak z lewej (bok 3cm)
i powyginaj wzdłuż przerywanych linii.
Połóż jedną na drugiej tak, by rogi dolnej jednakowo wystawały spod górnej.
Przyciskając środek palcem, nałóż recepturkę tak, by była nad rogami górnej
i pod rogami dolnej – puść!*

P4. Tajemnica kosmograficzna Keplera

Jest **pięć** planet, czyli ruchomych gwiazd, widocznych gołym okiem, a więc tyle samo, ile wielościanów foremnych.

Johannes Kepler obliczył, że można te dwie **piątki** skojarzyć, rysując **sferę o środku w Słońcu**:

gdy na sferze, na której leży orbita *Merkurego* opiszemy *ośmiościan* foremny to będzie on wpisany w sferę, na której leży orbita *Wenus*. Opisany na niej z kolei *dwudziestościan* będzie wpisany w sferę z orbitą *Ziemi*. *Dwunastościan* opisany na tej sferze będzie wpisany w sferę z orbitą *Marsa*, a *czworościan* opisany na tej sferze będzie wpisany w sferę z orbitą *Jowisza*. I *sześciokąt* opisany na niej będzie wpisany w sferę z orbitą *Saturna*.

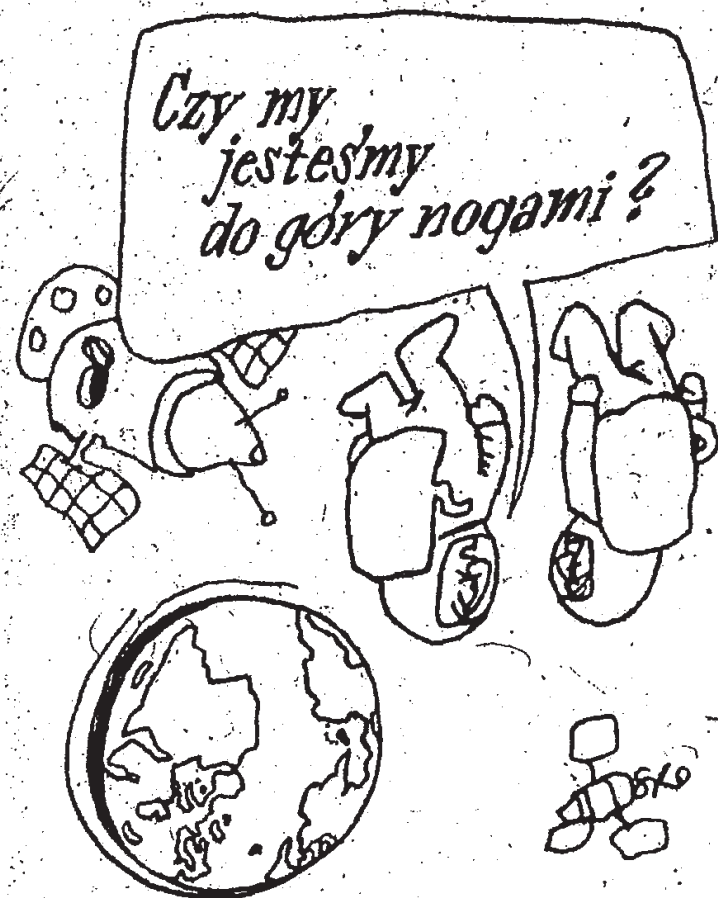


P5. Pięć nie zmienia się w lustrze



Kuli nie można postawić do góry nogami nie tylko dlatego, że nie ma ona nóg

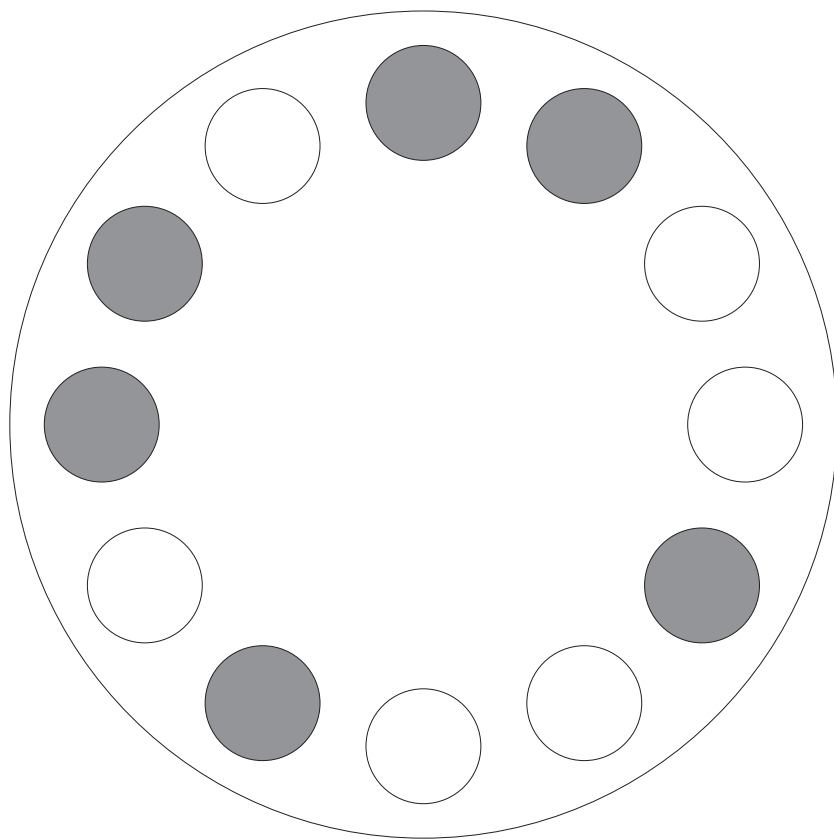
P5. Pięć nie zmienia się w lustrze



Kuli nie można postawić do góry nogami nie tylko dlatego, że nie ma ona nóg

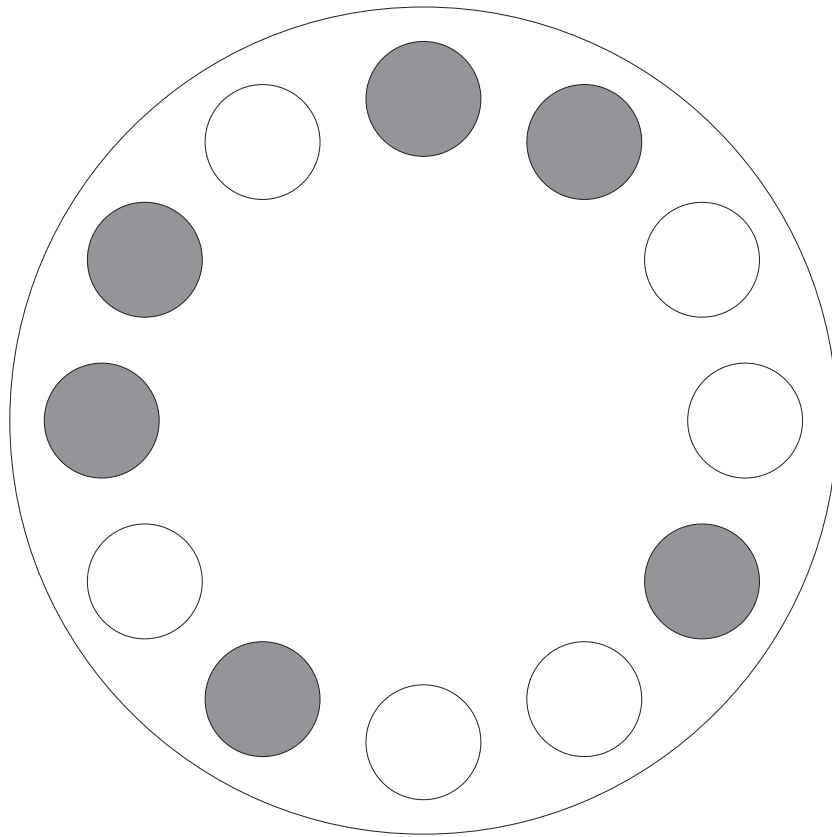
Fakt ten można wyrazić zdaniem

**Kula nie niesie na sobie
ORIENTACJI**

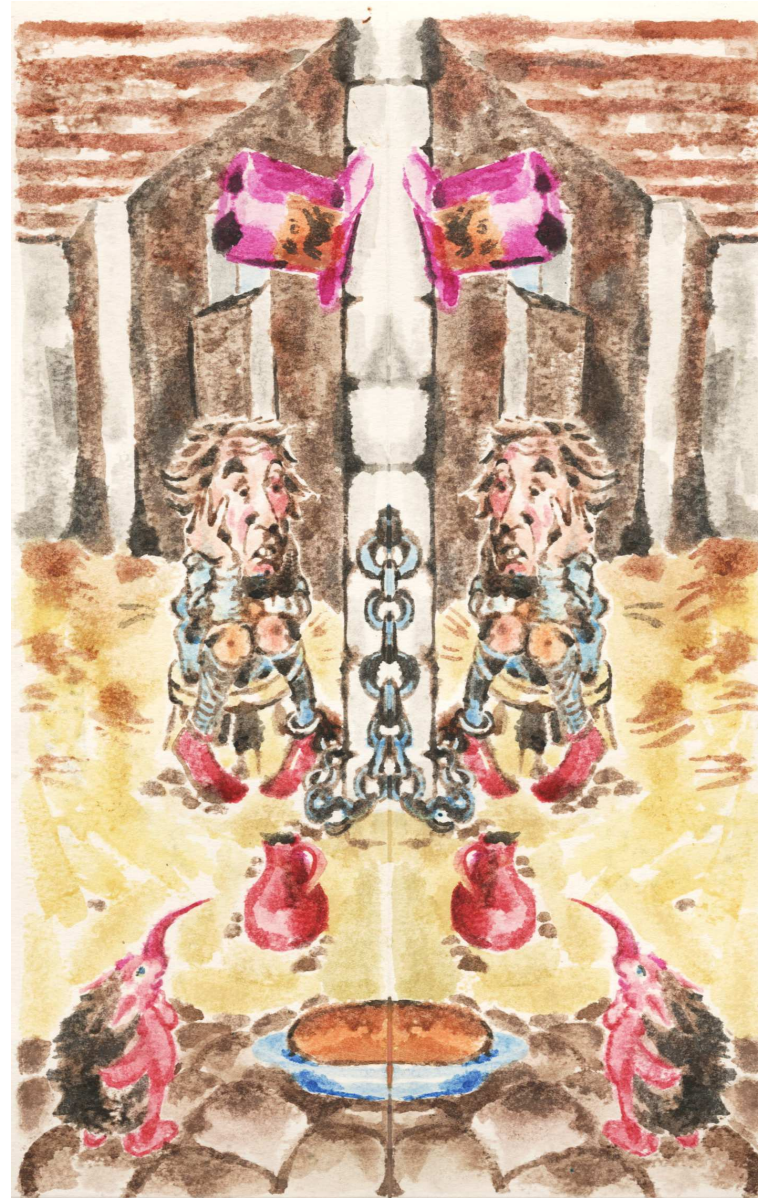


A czy fotografię tego zegara
odróżnilibyśmy od fotografii
jego lustrzanego odbicia?

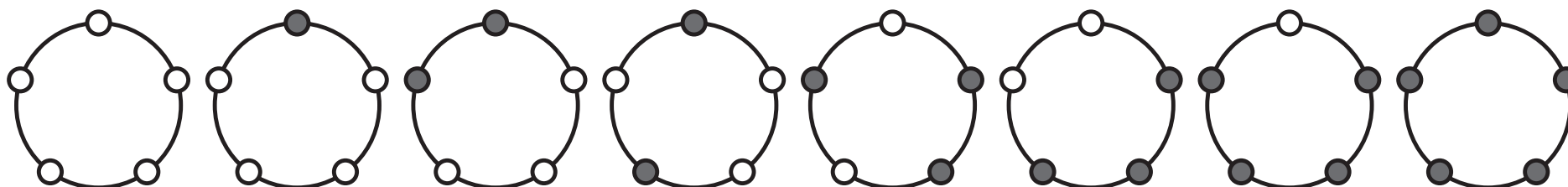
Podpowiedź daje kleksografia:



A czy fotografię tego zegara odróżnilibyśmy od fotografii jego lustrzanego odbicia?



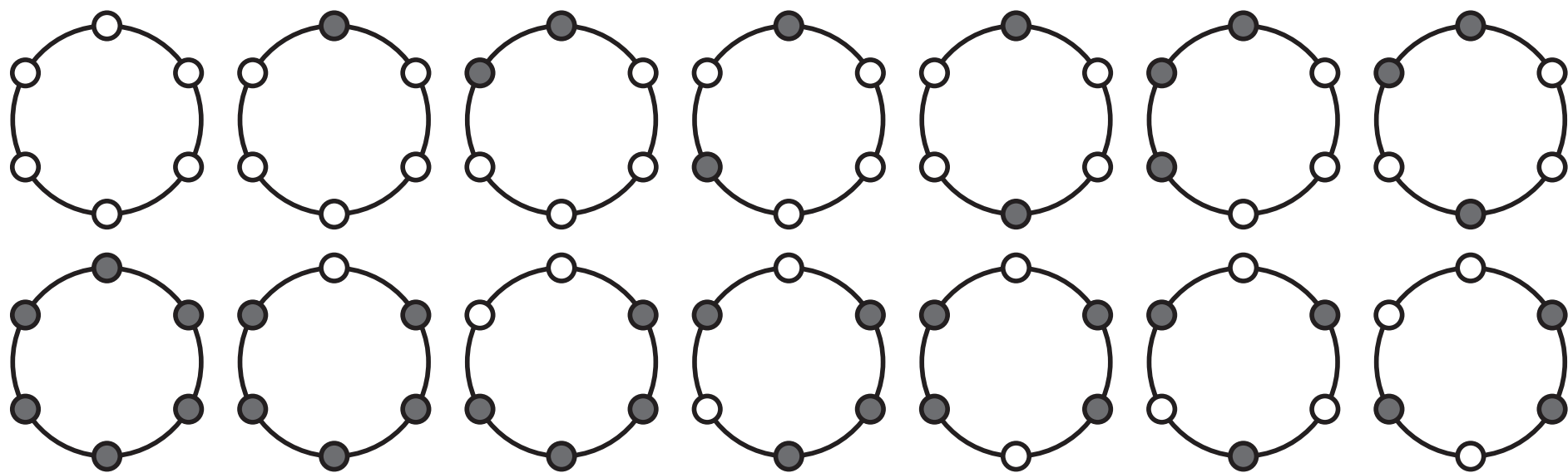
Zegar **pięć**godzinny nie niesie na sobie orientacji



i jest największym o tej własności

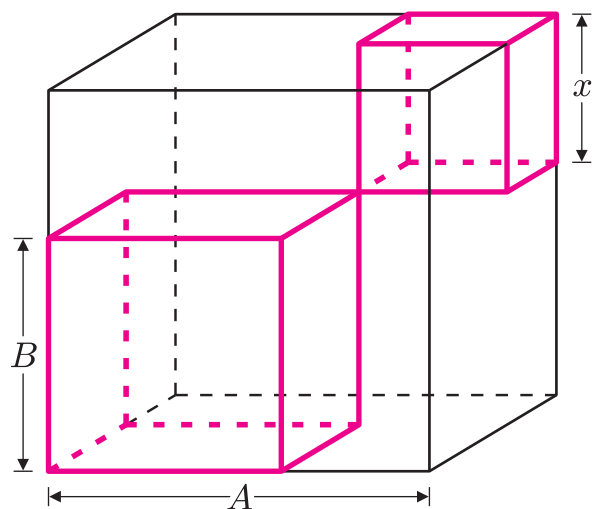
— wszystkie o większej liczbie godzin już orientację noszą;

proszę sprawdzić na zegarze z sześcioma godzinami!



I tak dobrnęliśmy do końca pierwszej
PIĄTKI!

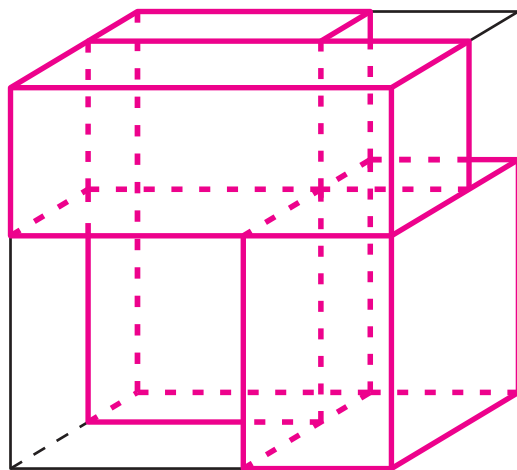
Z1. Równanie piątego stopnia



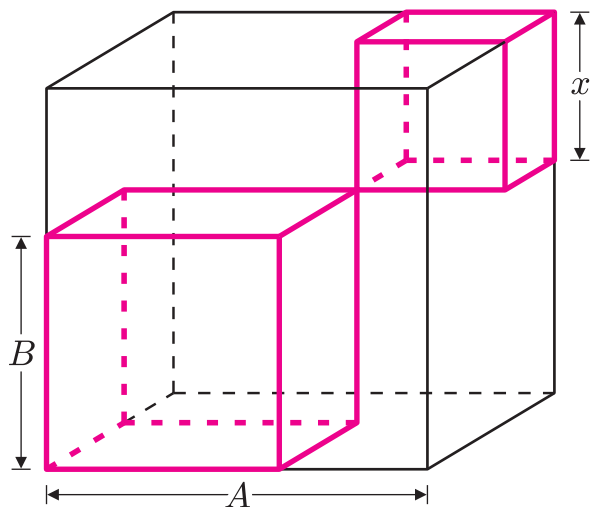
Równanie kwadratowe, czyli stopnia 2 rozwiązujemy w szkole.

Aby rozwiązać równanie stopnia 3
Nicolo Fontana (Tartaglia) zauważył
przed 490 laty,
że sześcián można rozłożyć na **pięć** części,
z których dwie są sześciánami,
a pozostałe 3 są jednakowymi “cegiełkami”.

Mamy więc $A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx$
oraz $x = A - B$.



Z1. Równanie piątego stopnia



Równanie kwadratowe, czyli stopnia 2 rozwiązujemy w szkole.

Aby rozwiązać równanie stopnia 3
Nicolo Fontana (Tartaglia) zauważył
przed 490 laty,
że sześcián można rozłożyć na **pięć** części,
z których dwie są sześciánami,
a pozostałe 3 są jednakowymi “cegiełkami”.

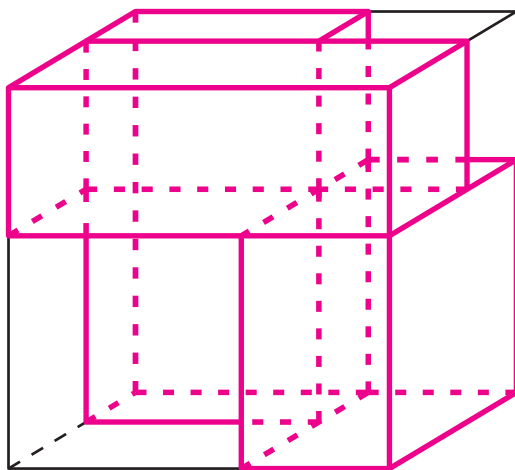
Mamy więc $A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx$
oraz $x = A - B$.

Aby rozwiązać równanie $x^3 + ax = b$
porównujemy je

do równania $x^3 + 3ABX = A^3 - B^3$,

co daje $a = 3AB$, $b = A^3 - B^3$,

a to pozwala znaleźć A i B, a więc x
za pomocą równania kwadratowego.



Dla ciekawskich:

**aby rozwiązać układ równań $3AB = a$ i $A^3 - B^3 = b$,
wystarczy podstawić $p := A^3$ i $q := B^3$, co daje**

$$pq = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad p - q = b,$$

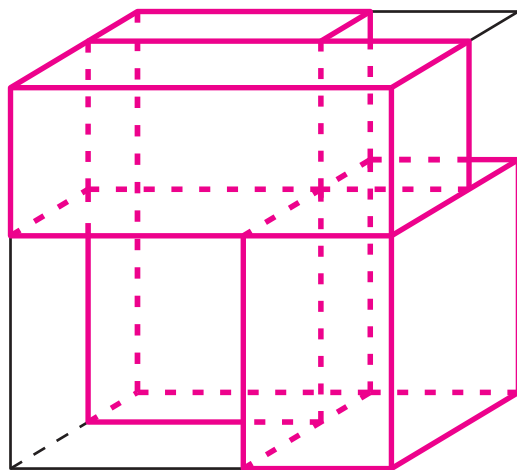
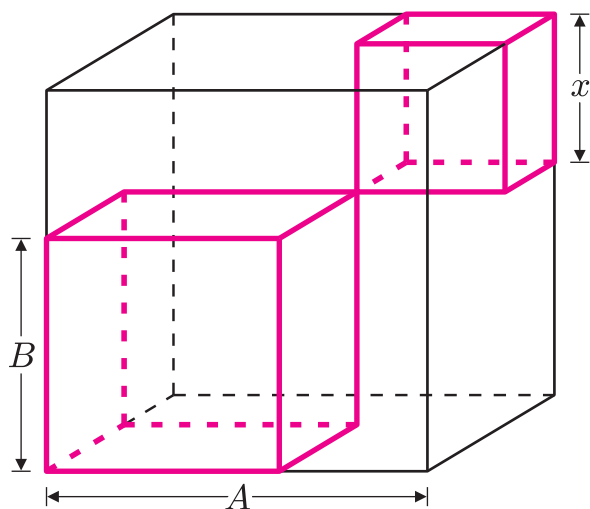
skąd mamy $(q + b)q = \frac{a^3}{27}$, czyli $q^2 + bq = \frac{a^3}{27}$,

a więc $q = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}$ oraz $p = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}$

i ostatecznie

$$x = A - B = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}}.$$

Z1. Równanie piątego stopnia



Równanie kwadratowe, czyli stopnia 2 rozwiązujemy w szkole.

Aby rozwiązać równanie stopnia 3
Nicolo Fontana (Tartaglia) zauważył
przed 480 laty,
że sześcián można rozłożyć na **pięć** części,
z których dwie są sześciánami,
a pozostałe 3 są jednakowymi “cegiełkami”.

Do rozwiązania równania stopnia 3
wystarczy wtedy rozwiązanie równania
stopnia 2, w którym niewiadomymi są
 A^3 i B^3 .

Dziesięć lat później Lodovico Ferrari
w podobny sposób wykorzystał
równanie stopnia 3
do rozwiązania równania stopnia 4.

Natomiast równanie **piątego** stopnia nie dawało się tak zaatakować.

Aż dwieście lat temu dwudziestoletni Niels Abel udowodnił, że **nie istnieje wzór na rozwiązanie równań piątego stopnia**, który składałby się tylko z dodawania, mnożenia, odejmowania, dzielenia i pierwiastków wszelkich całkowitych stopni (taki komplet narzędzi nazywamy **pierwiastnikami**).

Natomiast równanie **piątego** stopnia nie dawało się tak zaatakować.

Aż dwieście lat temu dwudziestoletni Niels Abel udowodnił, że **nie istnieje wzór na rozwiązanie równań piątego stopnia**, który składałby się tylko z dodawania, mnożenia, odejmowania, dzielenia i pierwiastków wszelkich całkowitych stopni (taki komplet narzędzi nazywamy **pierwiastnikami**).

Niespełna dziesięć lat później inny dwudziestolatek, Evariste Galois, wskazał sposób sprawdzania, czy konkretne równanie **(dowolnego już stopnia)** ma takie “niewyrażalne” pierwiastki.

Natomiast równanie **piątego** stopnia nie dawało się tak zaatakować.

Aż dwieście lat temu dwudziestoletni Niels Abel udowodnił, że **nie istnieje wzór na rozwiązanie równań piątego stopnia**, który składałby się tylko z dodawania, mnożenia, odejmowania, dzielenia i pierwiastków wszelkich całkowitych stopni (taki komplet narzędzi nazywamy **pierwiastnikami**).

Niespełna dziesięć lat później inny dwudziestolatek, Evariste Galois, wskazał sposób sprawdzania, czy konkretne równanie **(dowolnego już stopnia)** ma takie “niewyrażalne” pierwiastki.

Takim równaniem jest np. $x^5 - 6x + 3 = 0$, choć łatwo stwierdzić, że ma pierwiastek pomiędzy -2 i -1 , pomiędzy 0 i 1 ,
a także pomiędzy 1 i 2 ,
bo lewa strona jest dla -2 ujemna, dla -1 i 0 dodatnia,
dla 1 znów ujemna i dla 2 znów dodatnia
(skądinąd wiemy, że ma tylko 3 pierwiastki).

Dla skrupulatnych:

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - 6x + 3 = 0$	-17	$+8$	$+3$	-2	$+23$

0

0

0

Z2. Płaskie powierzchnie zakrzywione

Student Śniadeckiego przed 190 laty
niedoskonałość człowieczą wyraził zdaniem:

takie widzi świata koło, jakie tępymi zakreśla oczy.

Rzeczywiście, wszystkie nasze obserwacje, również astronomiczne, informują nas jedynie o tym, jak wygląda świat tylko w pewnym naszym otoczeniu.

Powstaje problem, jak z tych obserwacji uzyskać informacje o kształcie świata w całości.

Dla trójwymiarowego świata problem okazał się bardzo trudny.

Dopiero dwadzieścia lat temu rozwiązał go Grigorij Perelman i jest to niewątpliwie największe osiągnięcie matematyczne ostatnich pięćdziesięciu lat.

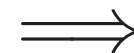
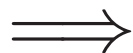
Natomiast dla “światów” dwuwymiarowych, czyli powierzchni, problem został rozwiązany przez Feliksa Kleina 140 lat temu.

W szczególności okazało się, że powierzchni, na których w ograniczonym obszarze obowiązuje ta znana, szkolna, geometria euklidesowa, jest **pięć**.

Po pierwsze, oczywiście, płaszczyzna.

Po drugie, walec, czyli zwinięta z płaszczyzny rurka – przecież własności niewielkich rysunków, narysowanych na płaszczyźnie, nie zmieniają się, gdy kartkę zwiniemy.

Po trzecie – z tego samego powodu – wstęga Möbiusa, czyli pasek z dwiema strzałkami narysowanymi w jedną stronę, sklejony tak, by strzałki dotykały się “całym ciałem”.



To były powierzchnie otwarte.

Z dwiema pozostałymi powierzchniami zamkniętymi
jest już większy kłopot.

Jedną z nich robi się z dwóch walców sklejąc je brzegami
(każdy walec ma dwa brzegi,
więc umieszczamy jeden w drugim
i skleamy dolny z dolnym,
a górny z górnym).

Oczywiście powstaje coś w rodzaju
dętki rowerowej, czyli – w żargonie
matematycznym – **torus**.

Gdy skleimy dwie wstęgi Möbiusa
(każda ma jeden brzeg)
otrzymujemy **butelkę Kleina**.



To były powierzchnie otwarte.

Z dwiema pozostałymi powierzchniami zamkniętymi
jest już większy kłopot.

Jedną z nich robi się z dwóch walców skleając je brzegami
(każdy walec ma dwa brzegi,
więc umieszczamy jeden w drugim
i skleamy dolny z dolnym,
a górny z górnym).

Oczywiście powstaje coś w rodzaju
dętki rowerowej, czyli – w żargonie
matematycznym – **torus**.

Gdy skleimy dwie wstęgi Möbiusa
(każda ma jeden brzeg)
otrzymujemy **butelkę Kleina**.

Można jednak mieć wątpliwości,
czy “płaskość” nie zepsuje się przy sklejaniu walców
i czy dwie wstęgi Möbiusa w ogóle dadzą się skleić.

I SŁUSZNIE!



Z3. Piąty wymiar

Okazuje się, że w pięciowymiarowej przestrzeni można zrealizować butelkę Kleina bez samoprzecięć.

Nawet więcej:

w przestrzeni pięciowymiarowej można zrealizować
(w matematycznym żargonie: zanurzyć)
każdą powierzchnię.

Inny, łatwy do wzięcia w rękę przykład
powierzchni niezanurzalnej w trójwymiarowej przestrzeni
stanowi płaszczyzna rzutowa,
czyli sklejenie wstęgi Möbiusa z kołem.

Z3. Piąty wymiar

Okazuje się, że w pięciowymiarowej przestrzeni można zrealizować butelkę Kleina bez samoprzecięć.

Nawet więcej:

w przestrzeni pięciowymiarowej można zrealizować
(w matematycznym żargonie: zanurzyć)
każdą powierzchnię.

Inny, łatwy do wzięcia w rękę przykład
powierzchni niezanurzalnej w trójwymiarowej przestrzeni
stanowi płaszczyzna rzutowa,
czyli sklejenie wstęgi Möbiusa z kołem.

To, że w przestrzeni o większej liczbie wymiarów jest luźniej,
demonstruje również fakt,
że w przestrzeni czterowymiarowej nie można zawiązać węzła.

Z4. Podwojenie kuli

Jeśli wykroczyliśmy matematycznie – czyli intelektualnie – poza granice realności, to nie sposób nie wspomnieć o teoretycznej możliwości podzielenia kuli na **pięć** części tak, by dwie z nich po przesunięciu dały taką samą kulę, jak ta na początku, a trzy pozostałe też.

Oczywiście, części te muszą być tak paskudne, by nie miały objętości (**to nie to samo, co objętość zero!**) – w przeciwnym razie popadlibyśmy w sprzeczność z fizyką (a gdyby kuli była np. złota, to i z fiskusem).

Konstrukcję tę, wykorzystując pomysły Hausdorffa, wymyślili 80 lat temu Stefan Banach i Alfred Tarski.

Z5. Nobel za piątkę

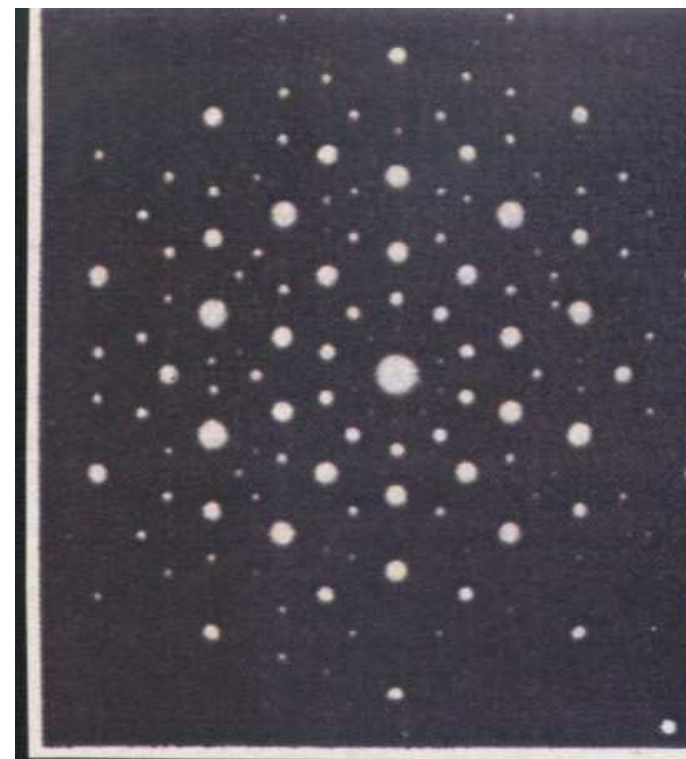
Można udowodnić, że wszystkie kryształy mają symetrię dwu-,
trzy- lub sześciokrotną.

Natomiast w 2011 roku nagrodę Nobla
w dziedzinie chemii
uzyskał metalurg, Daniel Schechtman,
za uzyskanie quasikryształu o symetrii
pięciokrotnej

(przedrostek *quasi* oznacza, że dana
struktura nie może być rozciągnięta
na całą przestrzeń i jest tylko lokalna).

Jest to, wraz z odkryciem grafenu,
wyraźna oznaka powrotu znaczenia
chemii nieorganicznej.

Chemia organiczna – od lat pięćdziesiątych XX wieku
do niedawna – była uważana za dominującą i to jej przedstawiciele
(np. za fullereny czy enantiomorficzną syntezę) nagradzano.



*Z całą pewnością
z każdą liczbą związane są
jakieś ciekawe fakty,
polecam kolekcjonowanie ich*

Zdumiewające prawo liczb ogłosił w 1881 roku astronom Simon Newcomb – stwierdził bowiem, że w dowolnie wybranych, byle obszernych tablicach astronomicznych

częstość pojawiania się na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego cyfry 1 jest równa 30,1%, 2 – 17,6%, 3 – 12,5%, 4 – 9,7%, 5 – 7,9%, 6 – 6,7%, 7 – 5,8%, 8 – 5,1%, 9 – 4,5%.

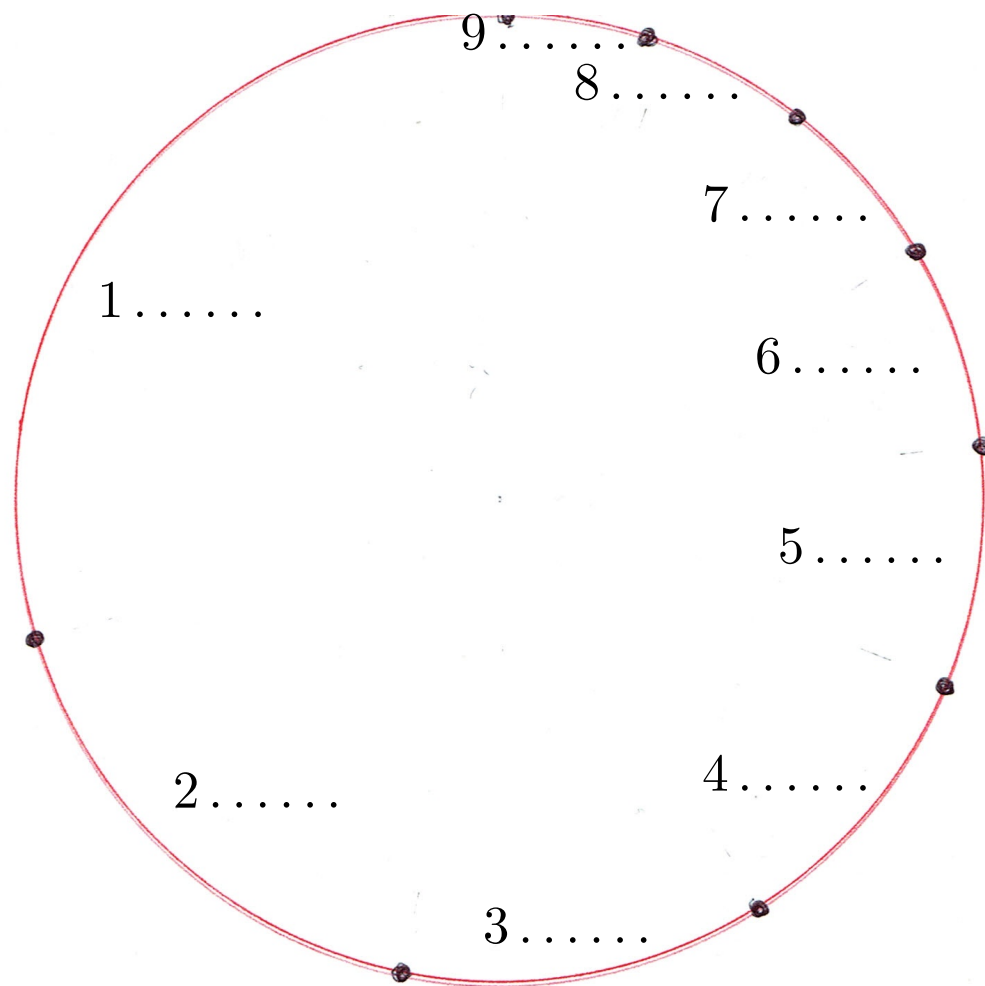
Uznano to za przypadek, a formułowanie takiego prawa za bzdurę.

W 1938 roku fizyk Frank Benford sprawdził, że w tablicach fizycznych też występuje dokładnie taka sama prawidłowość.

To już potraktowano poważniej i liczni matematycy (np. Bohl, Sierpinski, Weyl) natychmiast udowodnili, że tak faktycznie jest w każdym dostatecznie obszernym zbiorze liczb.

Natychmiast, bo dowód jest łatwy.

Jeśli logarytmy półprostej dodatniej nawiniemy na okrąg o promieniu 1, to otrzymamy taki obraz,



ponieważ

$$\log 1 = 0,0000$$

$$\log 2 = 0,3010$$

$$\log 3 = 0,4771$$

$$\log 4 = 0,6021$$

$$\log 5 = 0,6990$$

$$\log 6 = 0,7782$$

$$\log 7 = 0,8451$$

$$\log 8 = 0,9031$$

$$\log 9 = 0,9542$$

$$\log 10 = 1,0000$$

3010

1761

1250

968

792

669

580

511

458

Wszystko bierze się stąd, że system pozycyjny to naprawdę rozpatrywanie liczb jako potęg podstawy systemu.

Można więc dokładnie tym samym sposobem badać w innym systemie pozycyjnym częstość występowania liczb rozpoczynających się na 1, 2 itd.

W systemie **piątkowym** są cztery niezerowe cyfry:
1, 2, 3, 4.

Okazuje się, że częstość występowania liczb zaczynających się na 1 wynosi 43,1%, na 2 – 25,2%, na 3 – 17,9% i na 4 – 13,8%.

Ambitnych zachęcam do sprawdzenia.