

O trójkącie Sierpińskiego, potęgowaniu i przetaczaniu **krwi**

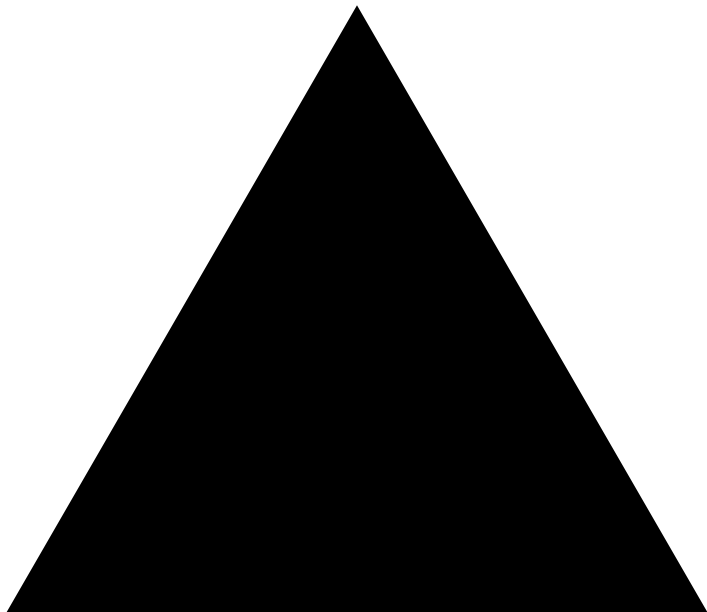
Andrzej Komisarski

`andrzej.komisarski@wmii.uni.lodz.pl`

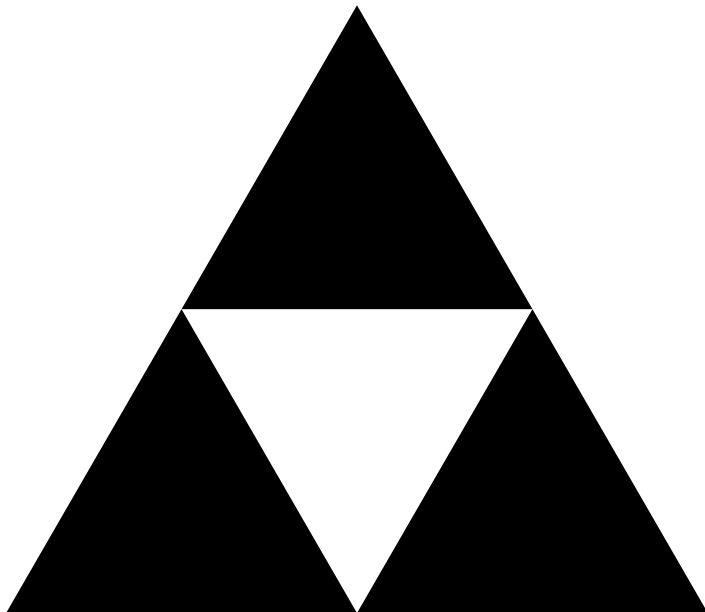
VIII Dzień Popularyzacji Matematyki
26 września 2024 r.



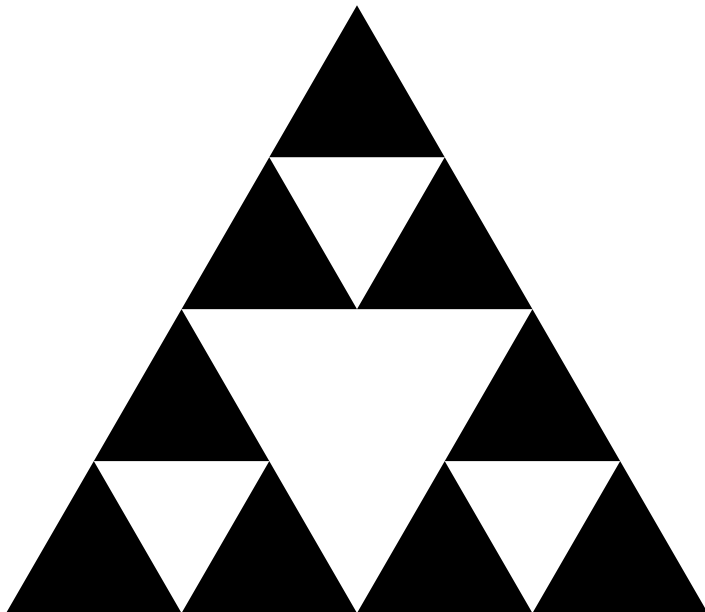
Trójkąt Sierpińskiego



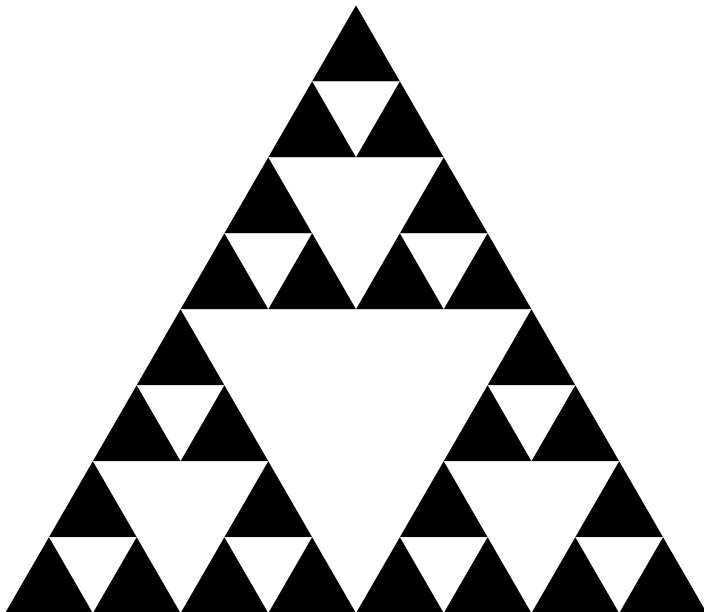
Trójkąt Sierpińskiego



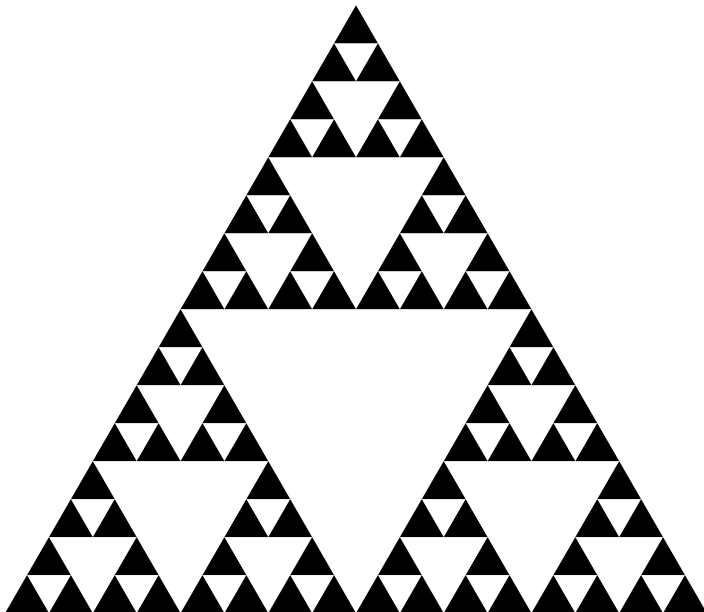
Trójkąt Sierpińskiego



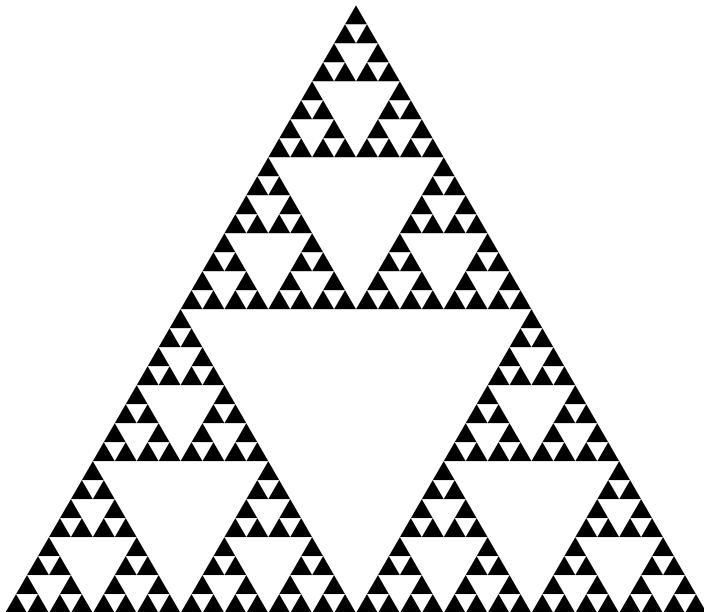
Trójkąt Sierpińskiego



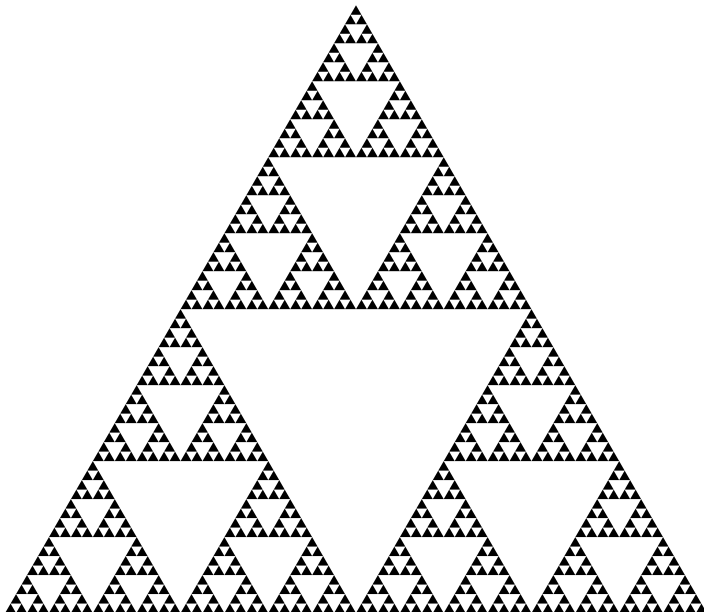
Trójkąt Sierpińskiego



Trójkąt Sierpińskiego



Trójkąt Sierpińskiego



Trójkąt Sierpińskiego w sztuce (XIII w.)



Trójkąt Sierpińskiego na posadzce bazyliki świętych Jana i Pawła
na Celiusie w Rzymie, XIII w.



ŁĄCZY NAS KREW, KTÓRA RATUJE ŻYĆIE
BO TĘTNI W NAS DOBRO

BIORCA

DAWCA

	O-	O+	A-	A+	B-	B+	AB-	AB+
O-	•							
O+	•	•						
A-	•		•	•				
A+	•	•	•	•				
B-	•			•	•	•		
B+	•	•		•	•	•		
AB-	•				•	•	•	•
AB+	•	•			•	•	•	•

**GRUPY
KRWI
RÓWNIEŻ
ŁĄCZĄ SIĘ
W PARY!**



twoja krew moje życie

www.twojakrew.pl

12 | MINI PORADNIK

Jak zostać Dawcą krwi

WARTO PAMIĘTAĆ!



**DYSKWALIFIKACJE CZASOWE
ABY ODDAĆ KREW
MUSISZ ODDCZekać:**



24

GODZINY

po leczeniu stomatologicznym

3

DNI

w trakcie, przed i po
zakończeniu miesiączki
(dotyczy kobiet)

5

DNI

po spożyciu aspiryny bądź jakiegokolwiek
środka zawierającego kwas acetylosalicylowy
(m.in. polopiryna, niektóre tabletki przeciw-
bólowe)

2

TYGODNIE

po zakończeniu antybiotykoterapii

4

TYGODNIE

po kontakcie z osobą chorą na chorobę
zakaźną

6

MIESIĘCY

operacja, tatuaż, przekłuwanie ciała:
piercing, kolczyki, akupunktura.

Jeśli masz wątpliwości
czy możesz oddać krew -
porozmawiaj z lekarzem!

tel. 42 61 61 405
tel. 42 61 61 467
tel. 42 61 61 497

Jak zostać Dawcą krwi

MINI PORADNIK | 13

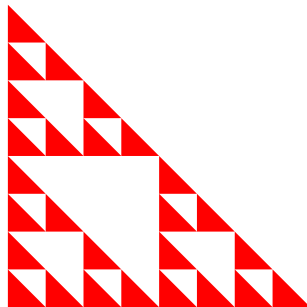
BIORCA

DAWCA

	O ⁻	O ⁺	A ⁻	A ⁺	B ⁻	B ⁺	AB ⁻	AB ⁺
O ⁻								
O ⁺								
A ⁻								
A ⁺								
B ⁻								
B ⁺								
AB ⁻								
AB ⁺								

Grupy krwi i... trójkąt Sierpińskiego

		DAWCA							
		O ⁻	O ⁺	A ⁻	A ⁺	B ⁻	B ⁺	AB ⁻	AB ⁺
BIORCA	O ⁻	●							
	O ⁺	●	●						
	A ⁻	●		●					
	A ⁺	●	●	●	●				
	B ⁻	●				●			
	B ⁺	●	●			●	●		
	AB ⁻	●		●		●		●	
	AB ⁺	●	●	●	●	●	●	●	●



Skąd on tu się wziął?

Grupy krwi i... trójkąt Sierpińskiego

B \ D	O-	O+	A -	A +	B-	B+	AB-	AB+
O-								
O+								
A -								
A +								
B-								
B+								
AB-								
AB+								

System dwójkowy (binarny)

Niech a , b , c będą cyframi 0 lub 1

$$abc_2 = 2^2 \cdot a + 2^1 \cdot b + 2^0 \cdot c = 4a + 2b + c$$

System dwójkowy (binarny)

Niech a , b , c będą cyframi 0 lub 1

$$abc_2 = 2^2 \cdot a + 2^1 \cdot b + 2^0 \cdot c = 4a + 2b + c$$

$$101_2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5$$

System dwójkowy (binarny)

Niech a, b, c będą cyframi 0 lub 1

$$abc_2 = 2^2 \cdot a + 2^1 \cdot b + 2^0 \cdot c = 4a + 2b + c$$

$$101_2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5$$

$$10_2 = 010_2 = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

System dwójkowy (binarny)

Niech a, b, c będą cyframi 0 lub 1

$$abc_2 = 2^2 \cdot a + 2^1 \cdot b + 2^0 \cdot c = 4a + 2b + c$$

$$101_2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5$$

$$10_2 = 010_2 = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

$$000_2 = 0_2 = 0$$

$$001_2 = 1_2 = 1$$

$$010_2 = 2_2 = 2$$

$$011_2 = 3_2 = 3$$

$$100_2 = 4$$

$$101_2 = 5$$

$$110_2 = 6$$

$$111_2 = 7$$

Zakodujmy grupy krwi jako liczby, używając systemu dwójkowego

Cyfra jedności: Rh+ to 1, Rh- to 0

Cyfra dwójek: A to 1, brak A to 0

Cyfra czwórek: B to 1, brak B to 0

Zakodujmy grupy krwi jako liczby, używając systemu dwójkowego

Cyfra jedności: Rh+ to 1, Rh- to 0

Cyfra dwójek: A to 1, brak A to 0

Cyfra czwórek: B to 1, brak B to 0

$$A+ = 011_2 = 3$$

$$AB- = 110_2 = 6$$

$$0+ = 001_2 = 1$$

		0	1	2	3	4	5	6	7
$0 = 000_2$	0-	●							
$1 = 001_2$	0+	●	●						
$2 = 010_2$	A -	●		●					
$3 = 011_2$	A +	●	●	●	●				
$4 = 100_2$	B-	●				●			
$5 = 101_2$	B+	●	●			●	●		
$6 = 110_2$	AB-	●		●		●		●	
$7 = 111_2$	AB+	●	●	●	●	●	●	●	●

		D A W C A							
		000 ₂	001 ₂	010 ₂	011 ₂	100 ₂	101 ₂	110 ₂	111 ₂
		0	1	2	3	4	5	6	7
B I O R C A	0 = 000 ₂ 0-	●							
	1 = 001 ₂ 0+	●	●						
	2 = 010 ₂ A -	●		●					
	3 = 011 ₂ A +	●	●	●	●				
	4 = 100 ₂ B-	●				●			
	5 = 101 ₂ B+	●	●			●	●		
	6 = 110 ₂ AB-	●		●		●		●	
	7 = 111 ₂ AB+	●	●	●	●	●	●	●	●

Krew można przetoczyć, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego biorca ma co najmniej taką cyfrę, jak dawca

Potęgowanie i wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Potęgowanie i wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Potęgowanie i wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$\binom{n}{k}$ - symbol Newtona

liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n \text{ oraz } \binom{n}{k} = 0 \text{ gdy } k < 0 \text{ lub } k > n$$

$m!$ - czyt. m silnia $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ dla $m > 0$ oraz $0! = 1$

Potęgowanie i wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$\binom{n}{k}$ - symbol Newtona

liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n \text{ oraz } \binom{n}{k} = 0 \text{ gdy } k < 0 \text{ lub } k > n$$

$m!$ - czyt. m silnia $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ dla $m > 0$ oraz $0! = 1$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Trójkąt Pascala

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

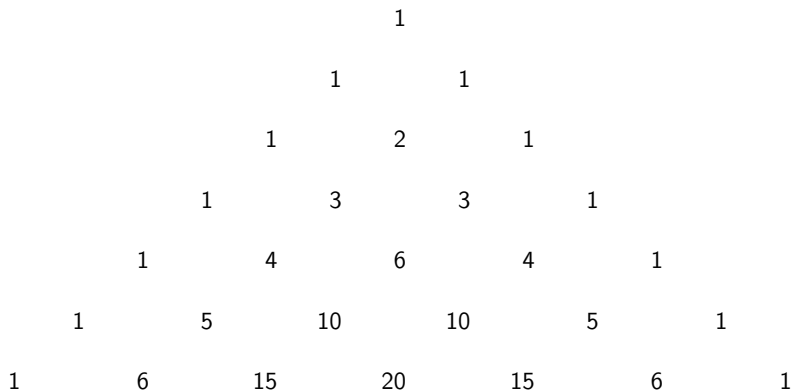
$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{6}{0} = 1 \quad \binom{6}{1} = 6 \quad \binom{6}{2} = 15 \quad \binom{6}{3} = 20 \quad \binom{6}{4} = 15 \quad \binom{6}{5} = 6 \quad \binom{6}{6} = 1$$

Trójkąt Pascala



A Pascal's Triangle with 6 rows. The numbers are arranged in a triangular shape, with each row starting and ending with 1. The values in each row are as follows:

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
1		4		6		4		1	
1	5		10		10		5		1
1	6	15	20	15	6	1			

Trójkąt Pascala

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

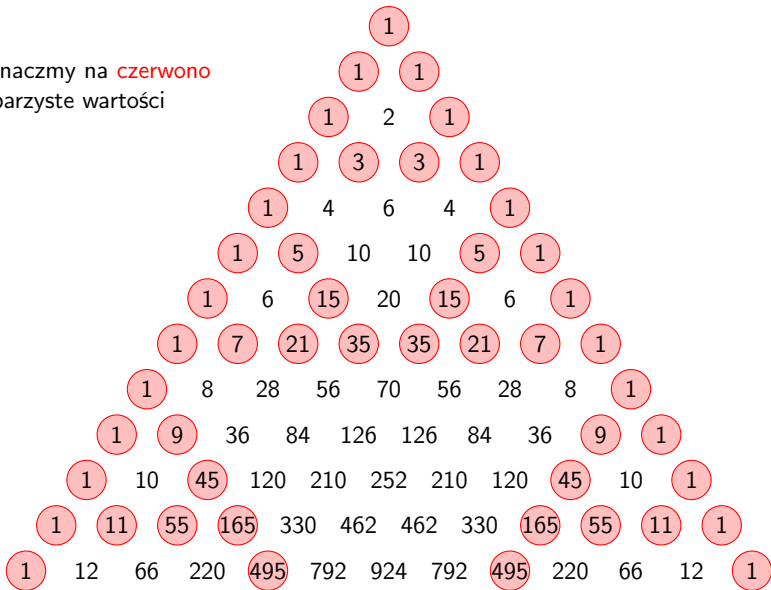
Trójkąt Pascala

Zaznaczmy na **czerwono**
nieparzyste wartości

[illegible]

Trójkąt Pascala

Zaznaczmy na **czerwono**
nieparzyste wartości



B \ D	0-	0+	A -	A +	B-	B+	AB-	AB+
0-	●							
0+	●	●						
A -	●		●					
A +	●	●	●	●				
B-	●				●			
B+	●	●			●	●		
AB-	●		●		●		●	
AB+	●	●	●	●	●	●	●	●

Możliwość przetaczania krwi

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Nieparzystość symbolu Newtona ($\binom{n}{k}$)

Pokażemy, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Pokażemy, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste. $\binom{2^m}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru 2^m -elementowego. Wystarczy te podzbiory sprytnie połączyć w pary.

Pokażemy, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste. $\binom{2^m}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru 2^m -elementowego. Wystarczy te podzbiory sprytnie połączyć w pary.

KROK 2

Jeśli $0 \leq n < 2^m$ oraz $0 \leq k < 2^m$, to $\binom{n}{k}$, $\binom{2^m+n}{k}$ oraz $\binom{2^m+n}{2^m+k}$ mają tę samą parzystość.

$$\text{Ozn. } \binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$$

Pokażemy, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste. $\binom{2^m}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru 2^m -elementowego. Wystarczy te podzbiory sprytnie połączyć w pary.

KROK 2

Jeśli $0 \leq n < 2^m$ oraz $0 \leq k < 2^m$, to $\binom{n}{k}$, $\binom{2^m+n}{k}$ oraz $\binom{2^m+n}{2^m+k}$ mają tę samą parzystość.

$$\text{Ozn. } \binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$$

KROK 3

Dokończenie dowodu

Przyda nam się wzór

$$\binom{c+d}{k} = \sum_i \binom{c}{i} \binom{d}{k-i}$$

Przyda nam się wzór

$$\binom{c+d}{k} = \sum_i \binom{c}{i} \binom{d}{k-i}$$

Uzasadnienie: Mamy zbiór $c + d$ -elementowy, np. $c + d$ osób: c chłopców i d dziewczynek. Mamy spośród nich wybrać k osób (podzbiór k -elementowy). Na ile sposobów możemy to zrobić? Oczywiście na $\binom{c+d}{k}$ sposobów.

Przyda nam się wzór

$$\binom{c+d}{k} = \sum_i \binom{c}{i} \binom{d}{k-i}$$

Uzasadnienie: Mamy zbiór $c + d$ -elementowy, np. $c + d$ osób: c chłopców i d dziewczynek. Mamy spośród nich wybrać k osób (podzbiór k -elementowy). Na ile sposobów możemy to zrobić? Oczywiście na $\binom{c+d}{k}$ sposobów.

Możemy jednak policzyć to inaczej: Najpierw decydujemy ilu wybierzemy chłopców (i), następnie wybieramy i chłopców ($\binom{c}{i}$ sposobów), a potem $k - i$ dziewczynek ($\binom{d}{k-i}$ sposobów). Razem $\sum_i \binom{c}{i} \binom{d}{k-i}$ sposobów.

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste.

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste.

Sprawdzamy dla kolejnych m (przez indukcję).

Gdy $m = 0$ (czyli $n = 2^0 = 1$), $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = 0$, co jest parzyste.

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste.

Sprawdzamy dla kolejnych m (przez indukcję).

Gdy $m = 0$ (czyli $n = 2^0 = 1$), $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = 0$, co jest parzyste.

Gdy $m > 0$ i $k \notin \{0, 2^{m-1}, n\}$, to

$\binom{2^m}{k} = \binom{2^{m-1}+2^{m-1}}{k} = \sum_i \binom{2^{m-1}}{i} \binom{2^{m-1}}{k-i}$, co jest parzyste,
bo wszystkie składniki są parzyste.

KROK 1

Jeśli $n = 2^m$ oraz $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k}$ jest parzyste.

Sprawdzamy dla kolejnych m (przez indukcję).

Gdy $m = 0$ (czyli $n = 2^0 = 1$), $k \neq 0$ i $k \neq n$, to $\binom{n}{k} = 0$, co jest parzyste.

Gdy $m > 0$ i $k \notin \{0, 2^{m-1}, n\}$, to

$\binom{2^m}{k} = \binom{2^{m-1}+2^{m-1}}{k} = \sum_i \binom{2^{m-1}}{i} \binom{2^{m-1}}{k-i}$, co jest parzyste,
bo wszystkie składniki są parzyste.

Gdy $m > 0$ i $k = 2^{m-1}$, to

$\binom{2^m}{k} = \binom{2^{m-1}+2^{m-1}}{k} = \sum_i \binom{2^{m-1}}{i} \binom{2^{m-1}}{k-i} \equiv$
 $\equiv \binom{2^{m-1}}{0} \binom{2^{m-1}}{2^{m-1}} + \binom{2^{m-1}}{2^{m-1}} \binom{2^{m-1}}{0} = 2$, co jest parzyste.

KROK 2

Jeśli $0 \leq n < 2^m$ oraz $0 \leq k < 2^m$, to $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$
(mają tę samą parzystość).

KROK 2

Jeśli $0 \leq n < 2^m$ oraz $0 \leq k < 2^m$, to $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$
(mają tę samą parzystość).

$$\binom{2^m+n}{k} = \sum_i \binom{2^m}{i} \binom{n}{k-i} \equiv \binom{2^m}{0} \binom{n}{k} + \binom{2^m}{2^m} \binom{n}{k-2^m} = \binom{n}{k} + 0 = \binom{n}{k}$$

KROK 2

Jeśli $0 \leq n < 2^m$ oraz $0 \leq k < 2^m$, to $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$
(mają tę samą parzystość).

$$\binom{2^m+n}{k} = \sum_i \binom{2^m}{i} \binom{n}{k-i} \equiv \binom{2^m}{0} \binom{n}{k} + \binom{2^m}{2^m} \binom{n}{k-2^m} = \binom{n}{k} + 0 = \binom{n}{k}$$

$$\binom{2^m+n}{2^m+k} = \sum_i \binom{2^m}{i} \binom{n}{2^m+k-i} \equiv \binom{2^m}{0} \binom{n}{2^m+k} + \binom{2^m}{2^m} \binom{n}{k} = 0 + \binom{n}{k} = \binom{n}{k}$$

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Skorzystamy z kroku 2, $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$ dla $0 \leq k, n < 2^m$

$$\binom{6}{2} = \binom{110_2}{010_2} \equiv \binom{10_2}{10_2} \equiv \binom{0_2}{0_2} = \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Skorzystamy z kroku 2, $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$ dla $0 \leq k, n < 2^m$

$$\binom{6}{2} = \binom{110_2}{010_2} \equiv \binom{10_2}{10_2} \equiv \binom{0_2}{0_2} = \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{11\textcolor{red}{0}_2}{10\textcolor{red}{1}_2} \equiv \binom{1\textcolor{red}{0}_2}{0\textcolor{red}{1}_2} \equiv \binom{\textcolor{red}{0}_2}{\textcolor{red}{1}_2} = \binom{0}{1} = 0 - \text{parzyste}$$

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Skorzystamy z kroku 2, $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$ dla $0 \leq k, n < 2^m$

$$\binom{6}{2} = \binom{110_2}{010_2} \equiv \binom{10_2}{10_2} \equiv \binom{0_2}{0_2} = \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{11\textcolor{red}{0}_2}{10\textcolor{red}{1}_2} \equiv \binom{1\textcolor{red}{0}_2}{0\textcolor{red}{1}_2} \equiv \binom{\textcolor{red}{0}_2}{\textcolor{red}{1}_2} = \binom{0}{1} = 0 - \text{parzyste}$$

$$\binom{17}{11} = \binom{1\textcolor{red}{0}001_2}{0\textcolor{red}{1}011_2} \equiv \binom{\textcolor{red}{0}001_2}{\textcolor{red}{1}011_2} = \binom{1}{11} = 0 - \text{parzyste}$$

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Skorzystamy z kroku 2, $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$ dla $0 \leq k, n < 2^m$

$$\binom{6}{2} = \binom{110_2}{010_2} \equiv \binom{10_2}{10_2} \equiv \binom{0_2}{0_2} = \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{11\textcolor{red}{0}_2}{10\textcolor{red}{1}_2} \equiv \binom{1\textcolor{red}{0}_2}{0\textcolor{red}{1}_2} \equiv \binom{\textcolor{red}{0}_2}{\textcolor{red}{1}_2} = \binom{0}{1} = 0 - \text{parzyste}$$

$$\binom{17}{11} = \binom{1\textcolor{red}{0}001_2}{0\textcolor{red}{1}011_2} \equiv \binom{\textcolor{red}{0}001_2}{\textcolor{red}{1}011_2} = \binom{1}{11} = 0 - \text{parzyste}$$

$$\binom{27}{10} = \binom{11011_2}{01010_2} \equiv \binom{1011_2}{1010_2} \equiv \binom{011_2}{010_2} \equiv \binom{11_2}{10_2} \equiv \binom{1_2}{0_2} \equiv \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Skorzystamy z kroku 2, $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$ dla $0 \leq k, n < 2^m$

$$\binom{6}{2} = \binom{110_2}{010_2} \equiv \binom{10_2}{10_2} \equiv \binom{0_2}{0_2} = \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

$$\binom{6}{5} = \binom{110_2}{101_2} \equiv \binom{10_2}{01_2} \equiv \binom{0_2}{1_2} = \binom{0}{1} = 0 - \text{parzyste}$$

$$\binom{17}{11} = \binom{10001_2}{01011_2} \equiv \binom{0001_2}{1011_2} = \binom{1}{11} = 0 - \text{parzyste}$$

$$\binom{27}{10} = \binom{11011_2}{01010_2} \equiv \binom{1011_2}{1010_2} \equiv \binom{011_2}{010_2} \equiv \binom{11_2}{10_2} \equiv \binom{1_2}{0_2} \equiv \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

Gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k , to dokonując analogicznych redukcji z kroku 2, przekształcimy $\binom{n}{k}$ do $\binom{0}{0}$. Wówczas $\binom{n}{k} \equiv \binom{0}{0} = 1$, czyli $\binom{n}{k}$ jest nieparzyste.

KROK 3

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Skorzystamy z kroku 2, $\binom{n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{k} \equiv \binom{2^m+n}{2^m+k}$ dla $0 \leq k, n < 2^m$

$$\binom{6}{2} = \binom{110_2}{010_2} \equiv \binom{10_2}{10_2} \equiv \binom{0_2}{0_2} = \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

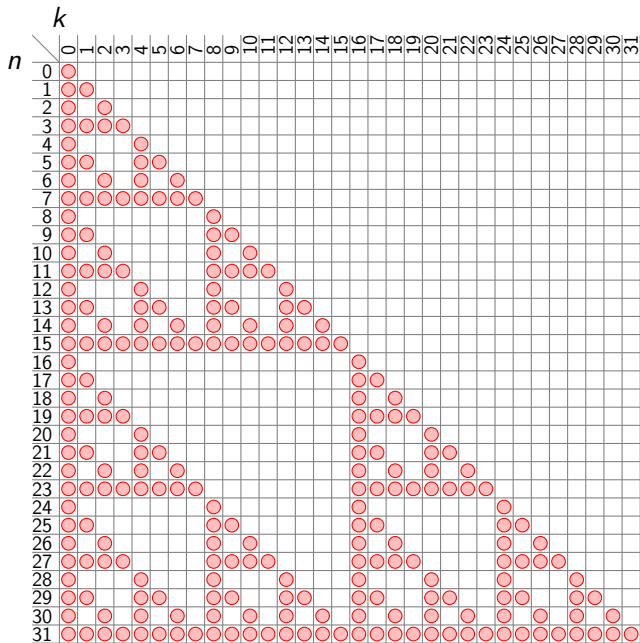
$$\binom{6}{5} = \binom{110_2}{101_2} \equiv \binom{10_2}{01_2} \equiv \binom{0_2}{1_2} = \binom{0}{1} = 0 - \text{parzyste}$$

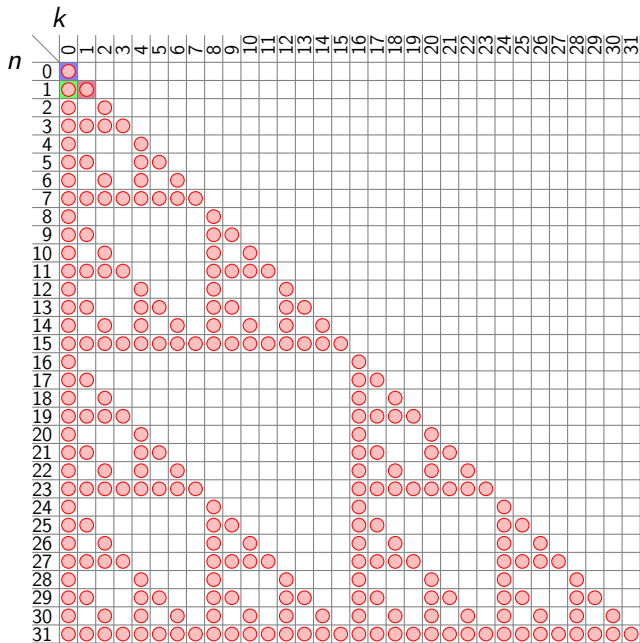
$$\binom{17}{11} = \binom{10001_2}{01011_2} \equiv \binom{0001_2}{1011_2} = \binom{1}{11} = 0 - \text{parzyste}$$

$$\binom{27}{10} = \binom{11011_2}{01010_2} \equiv \binom{1011_2}{1010_2} \equiv \binom{011_2}{010_2} \equiv \binom{11_2}{10_2} \equiv \binom{1_2}{0_2} \equiv \binom{0}{0} = 1 - \text{nieparzyste}$$

Gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k , to dokonując analogicznych redukcji z kroku 2, przekształcimy $\binom{n}{k}$ do $\binom{0}{0}$. Wówczas $\binom{n}{k} \equiv \binom{0}{0} = 1$, czyli $\binom{n}{k}$ jest nieparzyste.

Gdy na którejś pozycji zapisu dwójkowego n ma mniejszą cyfrę niż k , wówczas redukcjami z kroku 2, przekształcimy $\binom{n}{k}$ do $\binom{n'}{k'}$, gdzie $k' > n'$. Wówczas $\binom{n}{k} \equiv \binom{n'}{k'} = 0$, czyli $\binom{n}{k}$ jest parzyste.



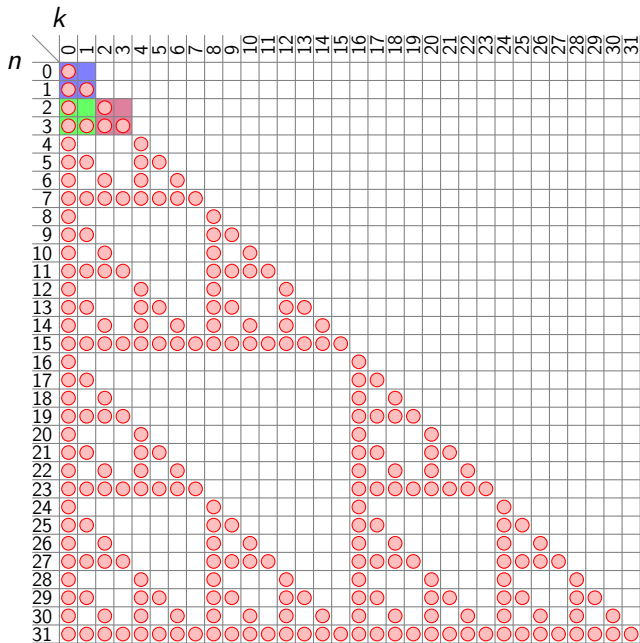


$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+2^0}{k}$$

$$\binom{n+2^0}{k+2^0}$$

$$k = n = 0$$

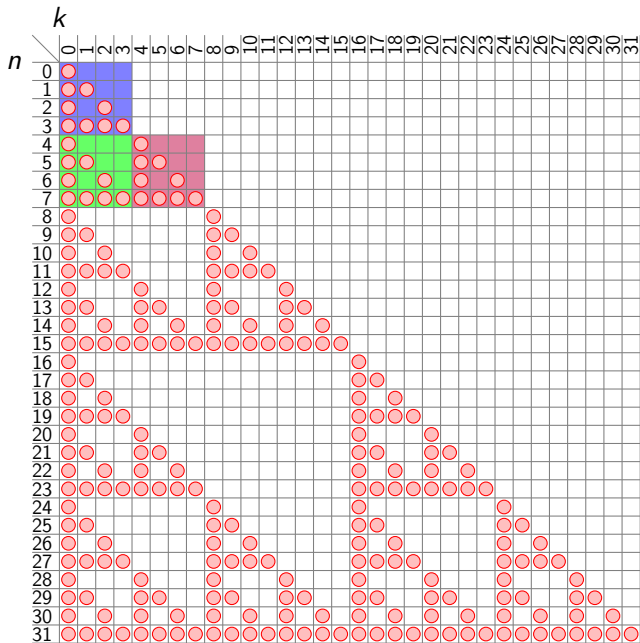


$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+2^1}{k}$$

$$\binom{n+2^1}{k+2^1}$$

$$k, n \in \{0, 1\}$$

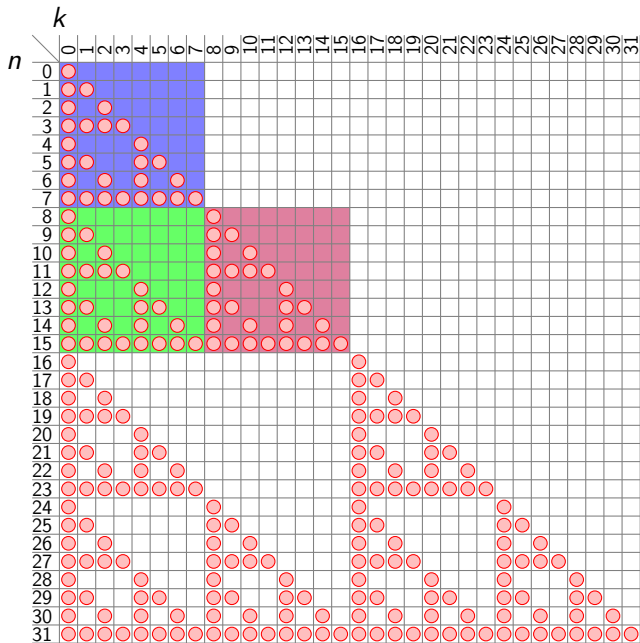


$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+2^2}{k}$$

$$\binom{n+2^2}{k+2^2}$$

$$k, n \in \{0, 1, 2, 3\}$$

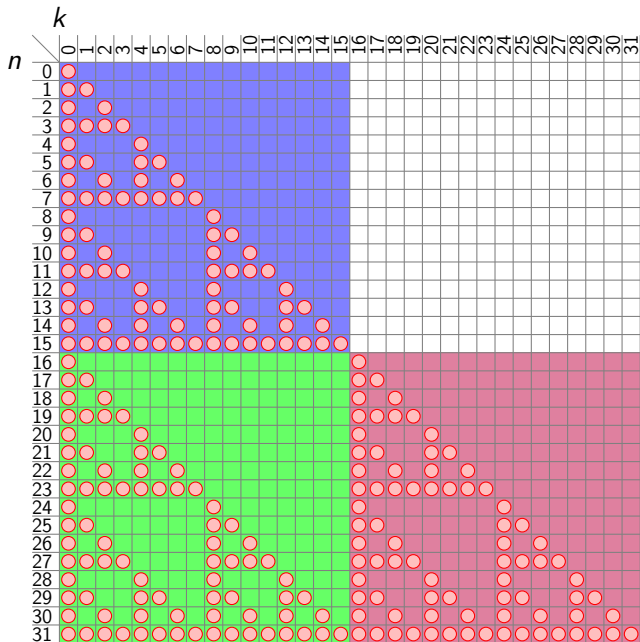


$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+2^3}{k}$$

$$\binom{n+2^3}{k+2^3}$$

$$k, n \in \{0, 1, \dots, 7\}$$

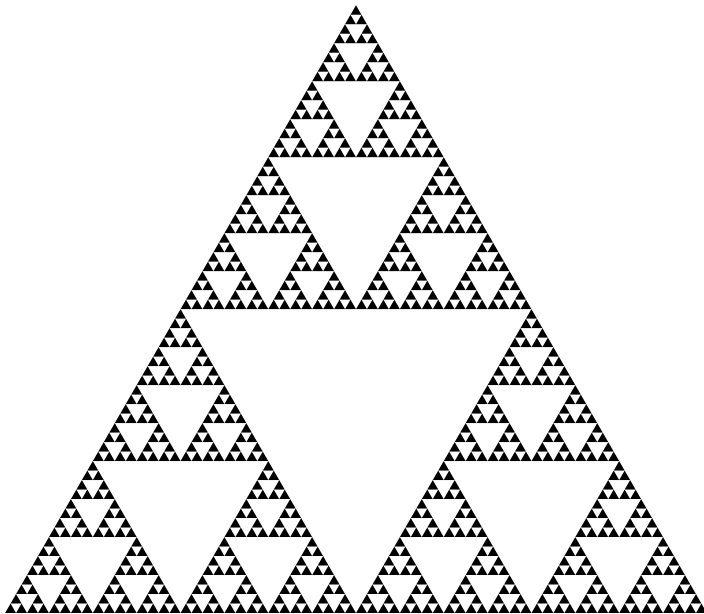


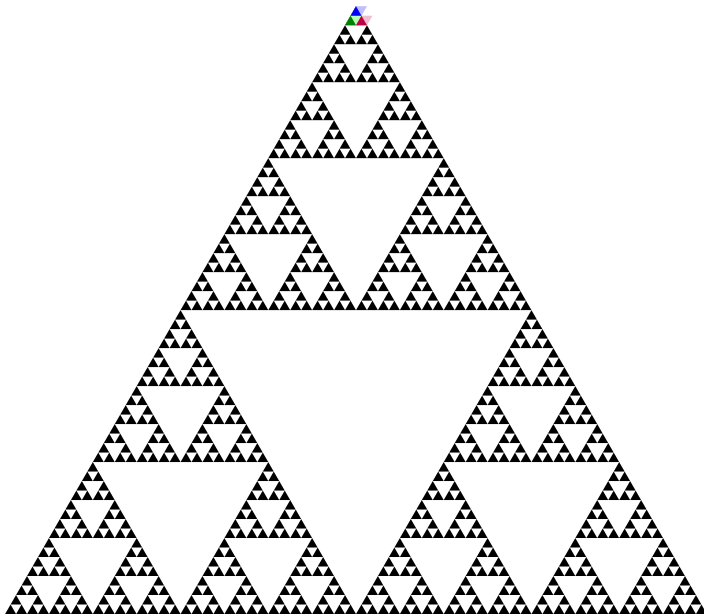
$$\binom{n}{k}$$

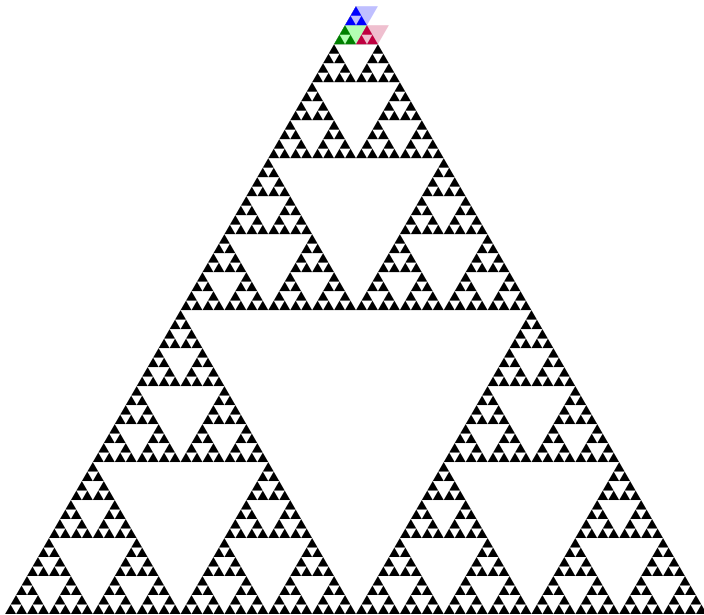
$$\binom{n+2^4}{k}$$

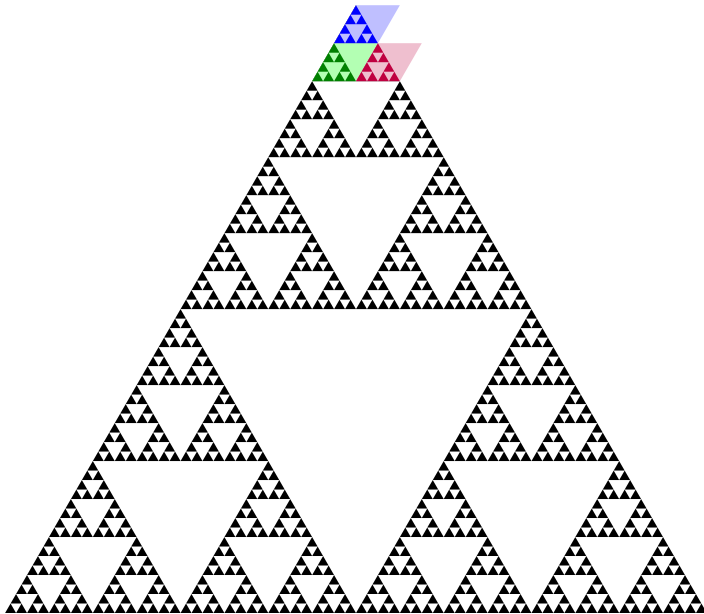
$$\binom{n+2^4}{k+2^4}$$

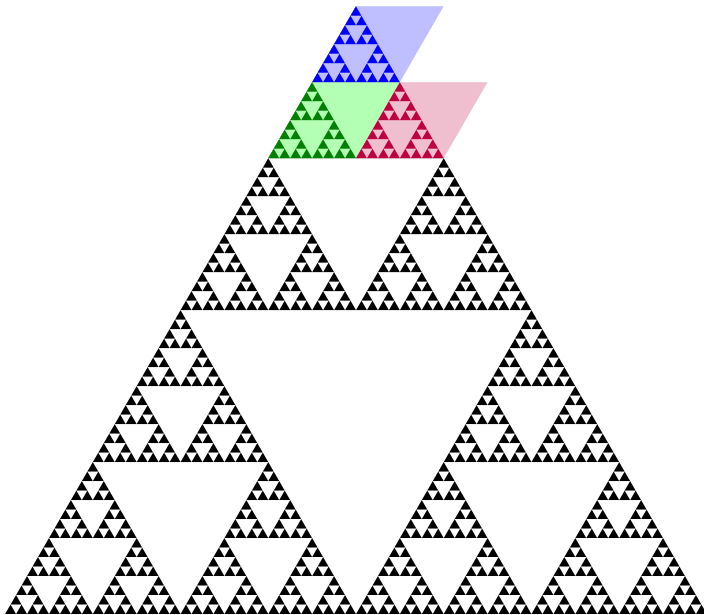
$k, n \in \{0, 1, \dots, 15\}$

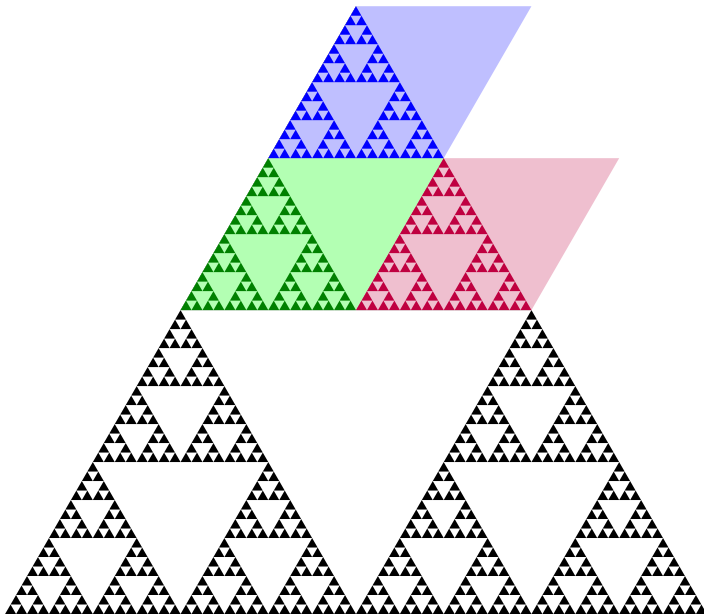


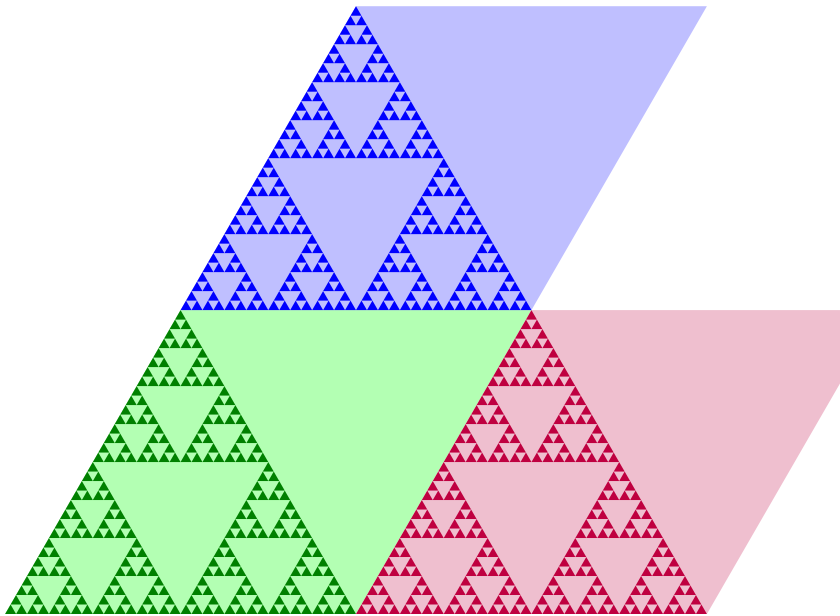












Twierdzenie Lucasa (1878)

Dla każdej liczby pierwszej p zachodzi

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{m_i}{n_i} \pmod{p},$$

gdzie

$$m = (m_k m_{k-1} \dots m_1 m_0)_p = \sum_{i=0}^k m_i p^i$$

$$n = (n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0)_p = \sum_{i=0}^k n_i p^i$$

$$m_0, m_1, \dots, m_k, n_0, n_1, \dots, n_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

KONIEC

główniej części prezentacji

Pozostałe slajdy zawierają Dodatek A i Dodatek B,
w których przedstawione są inne dowody tego,
że $\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji
zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Przez jaką najwyższą potęgę liczby 2 dzieli się $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$?

Wśród liczb $1, 2, \dots, n$ co druga (czyli $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) dzieli się przez 2,
co czwarta (czyli $\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor$) dzieli się przez 2^2 ,
co ósma (czyli $\lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor$) dzieli się przez 2^3 , itd.

Zatem najwyższą potęgą liczby 2, przez którą dzieli się $n!$ jest
$$\lfloor \frac{n}{2^1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$$

Przez jaką najwyższą potęgę liczby 2 dzieli się $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$?
 Wśród liczb $1, 2, \dots, n$ co druga (czyli $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) dzieli się przez 2,
 co czwarta (czyli $\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor$) dzieli się przez 2^2 ,
 co ósma (czyli $\lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor$) dzieli się przez 2^3 , itd.

Zatem najwyższą potęgą liczby 2, przez którą dzieli się $n!$ jest
 $\lfloor \frac{n}{2^1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$

Jeśli zapis dwójkowy liczby n to $(n_1 n_{l-1} \dots n_1 n_0)_2$, to zapis dwójkowy liczby $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ to $(n_1 n_{l-1} \dots n_2 n_1)_2$, liczby $\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor$ $(n_1 n_{l-1} \dots n_3 n_2)_2$, itd.

Wówczas **najwyższą potęgą liczby 2, przez którą dzieli się $n!$ jest**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor = \sum_{i=1}^l \sum_{j=i}^l n_j 2^{j-i} = \sum_{j=1}^l n_j \sum_{i=1}^j 2^{j-i} =$$

$$\sum_{j=1}^l n_j (2^j - 1) = \sum_{j=0}^l n_j 2^j - \sum_{j=0}^l n_j = n - s(n),$$

gdzie $s(n)$ to suma cyfr zapisu liczby n w zapisie dwójkowym.

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Gdy $k > n$, to na pewnej pozycji zapisu dwójkowego n ma mniejszą cyfrę niż k i jednocześnie $\binom{n}{k} = 0$ jest parzyste.

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Gdy $k > n$, to na pewnej pozycji zapisu dwójkowego n ma mniejszą cyfrę niż k i jednocześnie $\binom{n}{k} = 0$ jest parzyste.

Gdy $k \leq n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jest liczbą nieparzystą, gdy $n!$ oraz $k!(n-k)!$ dzielą się przez tę samą potęgę liczby 2, czyli gdy $n - s(n) = k - s(k) + (n - k) - s(n - k)$, czyli gdy $s(n) = s(k) + s(n - k)$.

$\binom{n}{k}$ ma wartość nieparzystą, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Gdy $k > n$, to na pewnej pozycji zapisu dwójkowego n ma mniejszą cyfrę niż k i jednocześnie $\binom{n}{k} = 0$ jest parzyste.

Gdy $k \leq n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jest liczbą nieparzystą, gdy $n!$ oraz $k!(n-k)!$ dzielą się przez tę samą potęgę liczby 2, czyli gdy $n - s(n) = k - s(k) + (n - k) - s(n - k)$, czyli gdy $s(n) = s(k) + s(n - k)$.

To z kolei ma miejsce, gdy w dodawaniu $k + (n - k) = n$ w systemie dwójkowym nie dochodzi do przeniesień (bo każde przeniesienie zmniejsza sumę cyfr o $2 - 1 = 1$, więc $s(n) = s(k) + s(n - k)$ – liczba przeniesień), czyli gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego n ma co najmniej taką cyfrę, jak k .

Niech $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$\binom{n}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru A .

Założmy, że $n = (n_l n_{l-1} \dots n_1 n_0)_2 = \sum_{j=0}^l n_j 2^j$ i rozważmy zbiory

$A_0, A_1, \dots, A_l$ takie, że $A_i = \mathbb{Z} \cap [\sum_{j=i+1}^l n_j 2^j, \sum_{j=i}^l n_j 2^j)$.

Niech $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$\binom{n}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru A .

Założmy, że $n = (n_l n_{l-1} \dots n_1 n_0)_2 = \sum_{j=0}^l n_j 2^j$ i rozważmy zbiory $A_0, A_1, \dots, A_l$ takie, że $A_i = \mathbb{Z} \cap [\sum_{j=i+1}^l n_j 2^j, \sum_{j=i}^l n_j 2^j)$.

Przykład: $n = 11 = 1011_2$

Mamy $l = 3$, $A_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} =$
 $\{0000_2, 0001_2, 0010_2, 0011_2, 0100_2, 0101_2, 0110_2, 0111_2\},$
 $A_2 = \emptyset$, $A_1 = \{8, 9\} = \{1000_2, 1001_2\},$
 $A_0 = \{10\} = \{1010_2\}.$

Niech $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$\binom{n}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru A .

Założmy, że $n = (n_l n_{l-1} \dots n_1 n_0)_2 = \sum_{j=0}^l n_j 2^j$ i rozważmy zbiory $A_0, A_1, \dots, A_l$ takie, że $A_i = \mathbb{Z} \cap [\sum_{j=i+1}^l n_j 2^j, \sum_{j=i}^l n_j 2^j)$.

Przykład: $n = 11 = 1011_2$

Mamy $l = 3$, $A_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} =$
 $\{0000_2, 0001_2, 0010_2, 0011_2, 0100_2, 0101_2, 0110_2, 0111_2\},$
 $A_2 = \emptyset$, $A_1 = \{8, 9\} = \{1000_2, 1001_2\},$
 $A_0 = \{10\} = \{1010_2\}.$

Zbiory $A_0, A_1, \dots, A_l$ są parami rozłączne, $A = \bigcup_{i=0}^l A_i$,

$A_i = \emptyset \Leftrightarrow n_i = 0$ oraz $|A_i| = 2^i$ gdy $n_i = 1$.

Jeśli $a \in A_i$ oraz b różni się od a tylko na ostatnich i cyfrach zapisu dwójkowego (czyli $a_{i-1}, \dots, a_1, a_0$), to $b \in A_i$.

Jeśli $a, b \in A_i$, to ich zapisy dwójkowe mogą się różnić tylko na ostatnich i pozycjach.

Interesuje nas parzystość $\binom{n}{k}$, więc spróbujemy k -elementowe podzbiory zbioru A połączyć w pary. Niech $B \subset A$, $|B| = k$.

Interesuje nas parzystość $\binom{n}{k}$, więc spróbujemy k -elementowe podzbiory zbioru A połączyć w pary. Niech $B \subset A$, $|B| = k$.

Przypadek 1. Istnieje taki zbiór A_i , że $\emptyset \neq A_i \cap B \neq A_i$. Weźmy najmniejsze i o tej własności. Istnieją wówczas $j = 0, 1, \dots, i-1$ oraz $a \in A_i \cap B$, $b \in A_i \setminus B$, których zapisy dwójkowe różnią się na tylko j -tej pozycji ($a_j \neq b_j$). Weźmy najmniejsze j o tej własności. Zbiór B łączymy w parę ze zbiorem B' takim, że $B \setminus A_i = B' \setminus A_i$, zaś elementy $B' \cap A_i$ to elementy $B \cap A_i$ ze zmienioną cyfrą na j -tej pozycji. Mamy $|B'| = |B| = k$, $B \neq B'$ oraz parą dla B' jest B .

Interesuje nas parzystość $\binom{n}{k}$, więc spróbujemy k -elementowe podzbiory zbioru A połączyć w pary. Niech $B \subset A$, $|B| = k$.

Przypadek 1. Istnieje taki zbiór A_i , że $\emptyset \neq A_i \cap B \neq A_i$. Weźmy najmniejsze i o tej własności. Istnieją wówczas $j = 0, 1, \dots, i-1$ oraz $a \in A_i \cap B$, $b \in A_i \setminus B$, których zapisy dwójkowe różnią się na tylko j -tej pozycji ($a_j \neq b_j$). Weźmy najmniejsze j o tej własności. Zbiór B łączymy w parę ze zbiorem B' takim, że $B \setminus A_i = B' \setminus A_i$, zaś elementy $B' \cap A_i$ to elementy $B \cap A_i$ ze zmienioną cyfrą na j -tej pozycji. Mamy $|B'| = |B| = k$, $B \neq B'$ oraz parą dla B' jest B .

Przypadek 2. Gdy dla wszystkich zbiorów A_i zachodzi $B \cap A_i = A_i$ lub $B \cap A_i = \emptyset$, to zbiór B zostawiamy bez pary. Zauważmy, że taki zbiór B jest co najwyżej jeden i to tylko wtedy, gdy na każdej pozycji zapisu dwójkowego $n = (n_l \dots n_1 n_0)_2$ ma co najmniej taką cyfrę, jak $k = (k_l \dots k_1 k_0)_2$. Istotnie, skoro $k = |B| = \sum_{i=0}^l |A_i \cap B| = \sum_{i: A_i \cap B \neq \emptyset} |A_i| = \sum_{i: A_i \cap B \neq \emptyset} 2^i$, to $B = \bigcup_{i: k_i=1} A_i$ i dla każdego i takiego, że $k_i = 1$ mamy $|A_i| = 2^i$, czyli $n_i = 1$.